Aufgabe 7-1 Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

und

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

(Korrigiert, Eigenwerte sind alle ganzzahlig, aber Q nicht.)

Aufgabe 7-2 Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ und die Eigenwerte von A.
2. Warum ist A diagonalisierbar?
3. Geben Sie eine Matrix S and, so dass $D = S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist. Geben Sie D an.

Aufgabe 7-3 Gegeben ist die Matrix $M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 3 & -2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

Verifizieren Sie, dass $\det M = 1$, dass 1 ein Eigenwert ist, dass M eine orthogonale Matrix ist. Aus diesen Eigenschaften folgt, dass M eine Drehmatrix ist.

Berechnen Sie die Achse, um die gedreht wird. (Hinweis, was gilt für den Eigenvektor von 1?) Berechnen Sie den Drehwinkel. (Von dem Drehachsenvektor gegen den Uhrzeigersinn den Winkel messen.)

Hinweis: Eine Drehmatrix, die den ersten Basisvektor festhält, und in y/z Ebene dreht, sieht so aus: $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Die Spur, d.h. die Summe der Diagonaleinträge, ist $1 + 2\cos\varphi$. Die Spur und der Drehwinkel bleiben bei einer Ähnlichkeitstransformation erhalten, d.h. auch für die Matrix M gilt $Spur = 1 + 2\cos\varphi$. Berechnen Sie daraus φ.

(Hinweis: für Information zu Drehmatrizen kann ich das Repetitorium der höheren Mathematik (Merziger/Wirth) empfehlen, Abschnitt 8.6.)

Aufgabe 7-4 Untersuchen Sie, ob die folgenden Matrizen diagonalisierbar sind, und wenn ja, geben Sie entsprechend eine Matrix S and, so dass $S^{-1}MS$ eien Diagonalmatrix ist.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} -8 & 16 & -6 \\ -5 & 13 & -6 \\ -5 & 14 & -7 \end{pmatrix},$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_5 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Arbeiten Sie das im TC verlinkte Blatt durch, die Lösungen sind angegeben, vollziehen Sie aber alle Schritte nach, (wie kommt man auf das charakteristische Polynom, wie auf die Nullstellen mit Polynomdivison, wie auf die Eigenvektoren? usw., usw.) (Im TC bitte also alle Details der Rechnung hochladen.)