Hinweis für diejenigen, die die **501.072 (also die 3-Stündige Version)** hören: Von diesem Blatt nur die Aufgaben 8-1 und 8-5 (und keine weiteren der folgenden Blätter). Es gibt damit 2 Kreuze zu den bisherigen 48 Kreuzen, also ist für Sie die Maximalzahl der Kreuze 50.

Aufgabe 8-1 Geben Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix in Abhängigkeit von b an. Für welche $b \in \mathbb{R}$ existiert eine reelle Cholesky-Zerlegung?

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & b \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8-2 Geben Sie für die Tridiagonalmatrix W die LR-Zerlegung an:

$$W = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & c_n & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & r_n \end{pmatrix}.$$

Die rechte Seite kann durch
$r_1 = a_1$
$l_i = \frac{c_i}{r_{i-1}}, \qquad i = 2, \dots, n$
$r_i = a_i - l_i b_{i-1}, \qquad i = 2, \dots, n$ berechnet werden. Es muss $r_1, \dots, r_n \neq 0$ gelten.

Führen Sie diese Rechnung durch, wenn $n = 4$ und $a_i = 3, \quad i = 1, \dots, n$.
$b_i = c_i = 1, \qquad i = 1, \dots, n$.
(Genaugenommen wird c_1 und b_n nicht verwendet),
Machen Sie die Probe.

Aufgabe 8-3 Eine Addition und Multiplikation der Form $a + bc$ werde als ein Rechenschritt gezählt, (dahinter steckt der Gedanke, dass man eigentlich nur Multiplikationen zählen möchte, und Additionen zeitlich nicht ins Gewicht fallen.) Eine Division wird als ein Rechenschritt gezählt.

Zeigen Sie, dass die Anzahl der Rechenschritte des Cholesky-Verfahrens für die Zerlegung einer $n \times n$ -Matrix für große n etwa $\frac{1}{6}n^3$ Rechenschritte und n Wurzeloperationen sind. Hinweis: Sie können hier verwenden, dass $\sum_{k=1}^n k = \frac{(n+1)n}{2}$ und $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$ gilt.

Aufgabe 8-4 a) Suchen Sie im Internet, wie groß die Komplexität der Multiplikation zweier natürlicher Zahlen a, b mit n binären Stellen ist.
b) Suchen Sie im Internet, was man über die Komplexität der Multiplikation zweier $n \times n$ Matrizen weiss, (z.B. mit ganzen Zahlen).
c) Zählen Sie die Anzahl der Additionen und Multipikationen ganzer Zahlen, die man bei der normalen Matrixmultiplikation für 2×2-Matrizen mit ganzzahligen Einträgen verwendet.
Suchen Sie (z.B. im Internet) eine Erklärung, warum auch 7 Multiplikationen reichen, und vollziehen Sie diese Erklärung nach.

Aufgabe 8-5 Lösen Sie das 2-Punkt Randwertproblem

$$-u''(x) = x; u(0) = u(1) = 0$$

mit dem im VO-Teil vorgestellten Verfahren für $n = 3$. Fertigen Sie eine Skizze der numerischen Lösung an und vergleichen Sie diese mit der exakten Lösung. (Hinweis: Die exakte Lösung ist ein Polynom.)