Aufgabe 10-1 Berechnen Sie mit dem Newton Verfahren $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ die reelle Nullstelle der folgenden 3 Funktionen: $f_1(x) = (x^3-2)^2, f_2(x) = x^3 - 2, f_3(x) = x^2 - \frac{2}{x}$. Starten Sie mit $x_0 = 1$ und berechnen Sie (mit Taschenrechner) jeweils mindestens x_1 und x_2. Vergleichen Sie jeweils mit der exakten Lösung $x = 2^{1/3}$ und beobachten Sie die unterschiedliche Konvergenzgeschwindigkeit. (Selbstverständlich dürfen Sie ein kleines Computer-Programm schreiben.)

Aufgabe 10-2 Zur Erinnerung: in Aufgabe 3-8 wurde besprochen, dass gilt:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix} = (ad - bc)(eh - gf)$$

Verwenden Sie dies, um die Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

anzugeben. Betrachten Sie nun die symmetrische Matrix

$$B = A + E = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 10^{-2} \\ \sqrt{2} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \sqrt{2} \\ 10^{-2} & 0 & \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix},$$

mit einer "Fehlermatrix" E mit 2 sehr kleinen Einträgen. B kann mit einer orthogonalen Matrix Q diagonalisiert werden. Wenden Sie folgende Abschätzung an, um die Eigenwerte von B abzuschätzen, (Satz von Bauer und Fike): Sei λ ein Eigenwert von B, und $\lambda_i, i = 1, 2, 3, 4$ die Eigenwerte von A dann ist

$$\min_i |\lambda - \lambda_i| \leq ||E||_2 \; \mu_2(Q).$$

Hierbei ist $||E||_2$ die Spektralnorm von E, und μ_2 die entsprechende Konditionszahl (Definition 66 Skript). Wenn man zeigen kann, dass diese obere Schranke klein ist, weiss man, dass die Eigenwerte von A und B jeweils sehr nahe beieinander sind.

Überlegen Sie sich, dass nach Definition $\mu_2(Q) = 1, \varrho(E) = ||E||_2 = 10^{-2}$ gilt, und geben Sie damit ein möglichst kleines Intervall um λ_i an, in dem die Eigenwerte λ_i' von B liegen.

Berechnen Sie, (z.B. mit Software, oder geeigneter Webseite) die genauen Eigenwerte von B.

Aufgabe 10-3 (Im folgenden ist die Notation anders als im Skript.)

Schreiben Sie das Gleichungssystem für den "natürlichen kubischen Spline" auf, der durch die folgenden 5 Punkte geht:

$$(x_0 = -3, f_0 = 0), (x_1 = -2, f_1 = 2), (x_2 = 0, f_2 = 2), (x_3 = 1, f_3 = 11), (x_4 = 2, f_4 = 18).$$

("Natürlich" heisst hier, dass die 2. Ableitung an den beiden Rändern Null ist.) Mit $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ folgt:

$$\varphi_i(x) = \frac{(x_{i+1} - x)^3 M_i^* + (x - x_i)^3 M_{i+1}^*}{h_[i+1} + c_i(x - x_i) + d_i.$$

Mit $M_0^*, \dots, M_4^*, c_0, \dots c_4, d_0, \dots d_4$ ist die Funktion eindeutig bestimmt. Sie erhalten

$$\begin{pmatrix} 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 \\ h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 \\ 0 & h_3 & 2(h_3+h_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1^* \\ M_2^* \\ M_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f_2-f_1}{h_2} - \frac{f_1-f_0}{h_1} \\ \frac{f_3-f_2}{h_3} - \frac{f_2-f_1}{h_2} \\ \frac{f_4-f_3}{h_4} - \frac{f_3-f_2}{h_3} \end{pmatrix}$$

$(M_1^* = -1, M_2^* = 2, M_3^* = -1.)$ Berechnen Sie

$$d_i = f_i - M_i^* h_{i+1}^2, c_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - h_{i+1}(M_{i+1}^* - M_i^*).$$

Berechnen Sie hieraus die Funktion Spline-Funktion $\varphi(x)$, die auf den 4 Intervallen definiert ist.

$$\varphi(x) = \begin{cases} -(x+3)^3 + 3(x+3) & x \in [-3, -2] \\ \frac{1}{2}x^3 + (x+2)^3 - 6(x+2) + 6 & x \in [-2, 0] \\ ??(x-1)^3 - x^3 + 12x & x \in [0, 1] \\ (x-2)^3 + 6(x-1) + 12 & x \in [1, 2] \end{cases}$$

Geben Sie die Konstante bei dem ?? oben an. Verifizieren Sie, dass diese Funktion an den Stützstellen die angegebenen Werte annimmt, und an den Übergangsstellen jeweils von rechts und links auch die gleichen ersten und zweiten Ableitungen hat, und berechnen Sie die zweiten (einseitigen) Ableitungen am Rand.

Wenn möglich: plotten Sie die Funktion.