TU CLAUSTHAL
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. W. Klotz

Lineare Algebra I
WS 1999/2000
Klausur
19.02.2000

Name, Vorname	Matr.nummer	Fachrichtung	Fachsemester	Tutor

Ich bin damit einverstanden, daß mein Klausurergebnis ausgehängt wird.
◯ Ja ◯ Nein

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Max. Punkte	5	6	10	5	7	5	38	
bearbeitet ? bitte ankreuzen!								
erreichte Punkte								

Es wird nicht nur das Ergebnis, sondern insbesondere auch der Rechenweg bewertet. Begründen Sie Ihre Schritte ausreichend.
Wenn Sie bei einer Aufgabe nicht weiterkommen, z.B. weil bereits ein Rechenfehler vorliegt, beschreiben Sie bitte möglichst genau das prinzipielle Vorgehen, mit dem Sie die Aufgabe angehen wollten.

Aufgabe 1)[5 Punkte]

Es sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Man zeige, daß es genau dann einen Endomorphismus $f : V \to V$ mit Kern f = Bild f gibt, wenn dim V gerade ist.

Aufgabe 2) [2+4=6 Punkte]
Es sei A_n die $n \times n$-Matrix der Form

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & \dots & \dots & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Man berechne $a_k = \det A_k$ für $k = 1, 2$ und 3.

b) Man berechne $a_n = \det A_n$ durch Induktion allgemein.

Aufgabe 3) [3+3+4=10 Punkte]

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Matrix von f^{-1} bezüglich der Standardbasis.

b) Zeigen, Sie daß die Matrix von f bezüglich der Standardbasis positiv definit ist.

c) Es sei nun $P = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3 \text{ mit } a^2 + b^2 = c^2 \right\}$. Man nennt die Elemente in P pythagoräische Zahlentripel.

Beweisen Sie, daß f pythagoräische Tripel auf pythagoräische Tripel abbildet, d.h. zeigen Sie, daß die Abbildung $f : P \to P$ wohldefiniert ist.

Aufgabe 4) [5 Punkte]

Zeigen Sie, daß die Funktionen f_1, f_2 und f_3 mit $f_1(x) = x+1$, $f_2(x) = \sin x$ und $f_3(x) = \cos x$ im Vektorraum $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 5) [7 Punkte]

Stellen Sie

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 6 & -15 \\ 0 & 20 & 25 \\ 4 & 8 & 30 \end{pmatrix}$$

als Produkt QR einer orthogonalen Matrix Q und einer oberen Dreiecksmatrix R dar.

Hinweis: Es treten nur rationale Zahlen auf.

Aufgabe 6) [5 Punkte]

Man zeige, daß eine Permutation $\pi \in S_n$ genau dann gerade ist, wenn sie in ihrer Darstellung als Produkt disjunkter Zyklen eine gerade Anzahl von Zyklen gerader Länge hat.