TU CLAUSTHAL
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. W. Klotz

Lineare Algebra I
WS 1999/2000
Übungsklausur

Name:
Matrikelnummer:
Tutor:
Fachrichtung:

Die Übungsklausur wird in der nächsten Tutorenübung besprochen.

1	2	3	4	5	6	$\sum$	
12.5	5	5	7	6	10	45.5	

1) [jeweils 1 Punkt]
Es folgen ein paar Fragen, die sehr kurz zu beantworten sind. Wenn Sie richtig mit ja bzw. nein antworten, gibt es einen halben Punkt, wenn Sie zusätzlich eine richtige Begründung (Stichwort oder Beispiel) angeben, gibt es einen vollen Punkt. Schreiben Sie auf den freien Platz.

a) Gibt es einen Ring mit 1999 Elementen?

b) Gibt es einen Körper mit 2000 Elementen?

c) Gibt es in der Gruppe S_n ein Element der Ordnung n?

d) Geben Sie (ohne Begründung) alle Untergruppen der Gruppe $(\mathbb{Z}_7, +)$ an.

e) Es sei V der Vektorraum aller reellen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Ist $V_1 = \{x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, a, b, c, d, e \in \mathbb{R}\}$ ein Untervektorraum von V?

f) Es sei V wie in e). Ist $V_2 = \{f \in V : f(1) = 3f(0)\}$ ein Untervektorraum von V?

g)[jeweils 1/2 Punkt] Welche der folgenden Mengen sind Körper? (Bitte deutlich mit ja/nein kennzeichnen, keine Begründung nötig.)

$$(\mathbb{R}, +, \cdot), \quad (\mathbb{Z}, +, \cdot), \quad (\mathbb{C}\backslash\{0\}, +, \cdot), \quad (\mathbb{Z}_7, +, \cdot), \quad (\mathbb{Z}_8, +, \cdot).$$

h)[2Punkte] Gegeben seien lineare Abbildungen $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.
Warum gilt $f_2 \circ f_1 \neq id$?

i)[je 1 Punkt] Geben Sie die Permutationen als Produkt disjunkter Zykeln an (keine Begründung erforderlich):
(1,5,2,4)(8,11)(3,4,7)

(8,11)(3,4,7)(1,5,2,4)

Bei den folgenden Aufgaben bitte vollständige Begründungen angeben. Es wird nicht nur das Ergebnis, sondern auch insbesondere der Lösungsweg bewertet!

2)[5 Punkte] Es sei T der von den Polynomen

$$f_1(x) = x^3, f_2(x) = x^3 - x^2, f_3(x) = x^3 + x^2, f_4(x) = x^3 - 1$$

in $\mathbb{R}[x]$ aufgespannte Unterraum. Man bestimme eine linear unabhängige Teilmenge von $M = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, die ebenfalls T aufspannt, und beschreibe die Menge T möglichst genau.

3)[4 Punkte]

Man berechne $d = \mathrm{ggT}(13, 8)$ und gebe ganze Zahlen a und b an, so daß $13a+8b = d$ gilt. Weiter gebe man in $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ das Inverse von 13 an.

4)[7 Punkte] Es sei V die Menge der positiven reellen Zahlen. Die Vektoraddition sei wie folgt definiert:

$$a \oplus b = ab \text{ (als Produkt reeller Zahlen).}$$

Die skalare Multiplikation ist wie folgt definiert:

$$\lambda \circ a = a^\lambda \text{ für } a \in V \text{ und } \lambda \in \mathbb{R} \text{ (wobei } a^\lambda \text{ das Potenzieren in } \mathbb{R} \text{ ist).}$$

Man zeige, daß $(V, \oplus, \circ)$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.

(Schreiben Sie bitte alle Verknüpfungssymbole sorgfältig hin.)

5) [3+3 Punkte]

$$\begin{aligned} \text{Es seien } U_1 &= \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} : f(-x) = 2f(x) \text{ für alle } x > 0, f(0) = 0\} \\ \text{und } U_2 &= \{g \in \mathbb{R}^\mathbb{R} : g(-x) = -2g(x) \text{ für alle } x > 0, g(0) = 0\}. \end{aligned}$$

Man zeige:
a) U_1 und U_2 sind Unterräume von $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.
b) Die Summe $U_1 + U_2$ ist direkt.
(Sie brauchen bei b) $U_1 \oplus U_2$ nicht untersuchen!)

6)[3+4+4 Punkte]

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ und f ein Endomorphismus von V mit $f \circ f = f$. Zeigen Sie
a) Kern $f \cap$ Bild $f = \{\vec{0}\}$.
b) Kern $f \oplus$ Bild $f = V$.
c) Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. Sei auch g ein Endomorphismus von V mit $g \circ g = g$. Dann gilt:

$$(f + g) \circ (f + g) = f + g \Longleftrightarrow f \circ g = g \circ f = 0.$$