TU CLAUSTHAL
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. W. Klotz

Lineare Algebra I
WS 1999/2000
Tutorenübung 1
Ausgabe: 20.10.99

Dieses Blatt wird in der ersten Tutorenübung besprochen. Lösungen sind (ausnahmsweise) nicht abzugeben!

1. Man beweise:

a) $A \cup B = A \Rightarrow B \subseteq A$, b) $A \cap B = A \Rightarrow B \supseteq A$,
c) $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$.

2. Es sei A eine Menge und $(B_i)_{i \in I}$ ein Mengensystem. Man beweise die folgenden Distributivgesetze:

a) $A \cap (\cup_{i \in I} B_i) = \cup_{i \in I}(A \cap B_i)$, b) $A \cup (\cap_{i \in I} B_i) = \cap_{i \in I}(A \cup B_i)$.

3. Es seien A und B endlichen Mengen und $f : A \to B$. Man zeige:

a) f injektiv $\Rightarrow |A| \leq |B|$, b) f surjektiv $\Rightarrow |A| \geq |B|$,
c) f bijektiv $\Rightarrow |A| = |B|$.

Man vereinbart, daß für unendliche Mengen $|A| = |B|$ bedeuten soll, daß es eine Bijektion $f : A \to B$ gibt. Wir nennen A und B dann gleichmächtig.

4. Es sei $f : X \to Y$; $A, B \subseteq X$; $C, D \subseteq Y$. Man zeige:

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$,
c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$, d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Man überlege sich die Bedeutung von f^{-1}. Weiter belege man mit einem Beispiel, daß in b) nicht allgemein Gleichheit besteht.

5. Es sei $f : A \to B$. Man beweise:

a) Gibt es eine Abbildung $g :$ Bild $f \to A$ mit $g \circ f = id_A$, dann ist f injektiv und $g = f^{-1}$.
b) Gibt es eine Abbildung $h : B \to A$ mit $f \circ h = id_B$, dann ist f surjektiv.

6. Es seien A, B, C Teilmengen der Menge M. Man nennt $C' = M \setminus C$ das *Komplement* von C in M. Man beweise:

a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$,
b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.