TU CLAUSTHAL
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. W. Klotz

Lineare Algebra I
WS 1999/2000
Tutorenübung 12

1. Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $\vec{x} = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2$, $\vec{y} = (y_1, y_2)^t \in \mathbb{R}^2$.
   Unter welchen Bedingungen wird durch
   $$\beta(\vec{x}, \vec{y}) = a\ x_1 y_1 + b\ x_2 y_2 + c\ x_1 y_2 + d\ x_2 y_1$$
   ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert?

2. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die folgende Matrix A orthogonal?
   $$A = \frac{1}{1 + x(1+x)} \begin{pmatrix} -x & x(1+x) & 1+x \\ 1+x & -x & x(1+x) \\ x(1+x) & 1+x & -x \end{pmatrix}$$

3. Es sei
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
   Man bestimme eine orthogonale Matrix Q und eine obere Dreiecksmatrix R mit $A = Q \cdot R$.

4. Der Raum $\mathbb{C}^3$ sei mit dem komplexen Standard-Skalarprodukt ausgestattet. Es seien
   $$\vec{a}_1 = (-1, i, 1),\ \vec{a}_2 = (i, 0, 2),\ U = [\vec{a}_1, \vec{a}_2].$$
   Man bestimme eine Orthonormalbasis $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ von $\mathbb{C}^3$ mit $U = [\vec{b}_1, \vec{b}_2]$. (Hinweis: Wählen Sie sich ein *geeignetes* $\vec{a}_3$.)

5. Es sei
   $$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 8 & 41 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Man bestimme eine obere Dreiecksmatrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit lauter positiven Hauptdiagonaleinträgen, so daß $A = S^T S$ gilt.

   (Hinweis: Setzen Sie S mit Unbestimmten s_{ij} an.)