TU CLAUSTHAL
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. W. Klotz

Lineare Algebra I
WS 1999/2000
Tutorenübung 3
Ausgabe: 3.11.99

1. Es sei $f \in S_7,\ f = (1,2,3,4,5) \circ (1,2,7)$. Man bestimme:

a) Die Darstellung von f als Produkt disjunkter Zyklen.
b) $sgn f$.
c) f^{-2}.
d) $|[f]|$.

2. Man beweise:
a) S_n ist nicht abelsch für $n \geq 3$.

b) A_n ist nicht abelsch für $n \geq 4$.
c) $|A_n| = \frac{1}{2}\ n!$

3.a) Man beweise: Für alle Elemente a der Gruppe G sei $a^2 = e$. Dann ist G abelsch.
b) Formulieren Sie die Umkehrung der Aussage in a). Beweisen oder widerlegen Sie diese Umkehrung.
c) Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Man beweise, daß dann $\prod_{g \in G} g^2 = e$ gilt. Wenn $|G|$ ungerade ist, dann gilt sogar $\prod_{g \in G} g = e$.
d) Sei G eine endliche Gruppe. (G muß also nicht abelsch sein.) Falls $|G|$ gerade ist, dann gibt es ein $g \in G, g \neq e$, so daß $g^2 = e$ gilt.

4.a) Es seien G_1 und G_2 zyklische Gruppen der gleichen endlichen Ordnung, d. h. $|G_1| = |G_2|$. Man zeige: $G_1 \simeq G_2$.
b) Beweisen Sie: Ist p eine Primzahl und G eine Gruppe der Ordnung p, dann ist G zyklisch.

Es gibt also nach a) und b) genau eine Gruppe der Ordnung p, wenn p eine Primzahl ist, nämlich die zyklische Gruppe mit p Elementen.

5. Man beweise für beliebige Mengen M_1, M_2:

$$|M_1| = |M_2| \Rightarrow S(M_1) \simeq S(M_2).$$