1.Man definiere für $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$:

$$\alpha \sim \beta \iff (\beta - \alpha) \in \mathbb{Z}.$$

Statt $\alpha \sim \beta$ schreibt man auch $\alpha \equiv \beta$ modulo 1. Man zeige:

a) $\sim$ ist Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Q}$.

b) Sind $K(\alpha),\ K(\beta)$ Äquivalenzklassen und definiert man

$$K(\alpha) + K(\beta) = K(\alpha + \beta),$$

dann wird $(\mathbb{Q}/\sim, +)$ eine Gruppe G.

c) In G hat jedes Element eine endliche Ordnung.
Eine solche Gruppe nennt man Torsionsgruppe.

2. Es sei $k \in \mathbb{N}$ keine Quadratzahl. Zeige: $\sqrt{k}$ ist irrational.

3. Es sei $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}\,[\sqrt{k}] = \{a + b\,\sqrt{k} :\ a, b \in \mathbb{Q}\}$.
Man zeige, daß $\mathbb{Q}\,[\sqrt{k}]$ ein Teilkörper von $\mathbb{R}$ ist.