1. Man entscheide, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ Unterräume sind.
$M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \in \mathbb{Z}\}$,
$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) : 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0\}$,
$M_3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + x_3 < 1\}$,
$M_4 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^{11} = x_2^{11}\}$,
$M_5 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^{10} = x_2^{10}\}$,
$M_6 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 - x_3 \geq 0\}$.

2. Es seien M_1 und M_2 Teilmengen eines Vektorraumes V. Man zeige:
a) $[M_1 \cup M_2] = [M_1] + [M_2]$.
b) $[M_1 \cap M_2] \subseteq [M_1] \cap [M_2]$.
Man gebe ein Beispiel an, das zeigt, daß in b) nicht immer Gleichheit besteht.

3. Es seien $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

Man zeige, daß $\vec{a}$ und $\vec{b}$ genau dann linear abhängig sind, wenn

$$a_j b_k = a_k b_j \text{ für alle } j, k \in \{1, \ldots, n\} \text{ gilt.}$$

4. Man gebe $n + 1$ Vektoren $v_i \in \mathbb{R}^n$ an, von denen je n Vektoren linear unabhängig sind.

5. Es sei $M = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\} \subseteq \mathbb{R}^5$ mit

$\vec{a}_1 = (1, 0, 1, 0, 1)$, $\quad \vec{a}_2 = (1, 1, 1, 1, 1)$,
$\vec{a}_3 = (1, 2, 1, 2, 1)$, $\quad \vec{a}_4 = (3, 1, 3, 1, 3)$.

Man bestimme eine Basis B' von $[M]$ und eine Basis B von $\mathbb{R}^5$ mit $B' \subseteq B$.

6. Man zeige, daß $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$ im Vektorraum $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig ist.