**TU CLAUSTHAL**
**INSTITUT FÜR MATHEMATIK**
**Prof. Dr. W. Klotz**

**Lineare Algebra I**
WS 1999/2000
Tutorenübung 6

1. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n, U = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = 0\}$.

Man zeige, daß $U$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist und gebe eine Basis von $U$ an.

2. Es sei $M_1$ die Menge der geraden, $M_2$ die Menge der ungeraden Funktionen in $\mathbb{R}^\mathbb{R}$, d.h.

$$M_1 = \{f : f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\},$$
$$M_2 = \{g : g(x) = -g(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}.$$

Man zeige, daß $M_1, M_2$ Unterräume von $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ sind mit $\mathbb{R}^\mathbb{R} = M_1 \oplus M_2$.

3. Es sei $V = \mathbb{R}_3[x]$.
a) Man gebe eine sehr einfache Basis dieses Vektorraumes an.
b) Man prüfe, ob

$$B = \{x^3 - 2x + 3, x^3 - 2x^2 + 2x - 1, x^3 - 1, x^3 - 2x + 5\}$$

eine Basis von $V$ darstellt.
c) Es sei $f = x^3 - x^2 + 1,\ g = x^2 - 2x + 2$. Man ergänze $\{f, g\}$ durch Vektoren aus $B$ zu einer Basis von $V$.

4) Es sei $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ ein Körper. Weiter sei $a > 0$ und $a \in \mathbb{K}$, aber $\sqrt{a} \notin \mathbb{K}$.

Dann ist $K[\sqrt{a}] = \{\alpha + \beta\sqrt{a}, \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}$ wie auf dem Tutorenblatt 4 ein Körper, man sagt „$\mathbb{K}$ adjungiert mit Wurzel $a$“.

Es sei nun $b > 0$ und $b \in K$, aber $\sqrt{b} \notin K[\sqrt{a}]$.
Weiter sei $K[\sqrt{a}, \sqrt{b}] = (K[\sqrt{a}])[\sqrt{b}] = \{\gamma + \delta\sqrt{b}, \gamma, \delta \in \mathbb{K}[\sqrt{a}]\}$.

Das soll bedeuten, daß man den Körper $K$ zuerst zu $K[\sqrt{a}]$ erweitert, dann ganz analog zur ersten Erweiterung eine zweite Erweiterung vornimmt.

Betrachten Sie nun $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$. Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$ ist, und geben Sie eine Basis an. (Hinweis: $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ ist keine Basis, aber wenn Sie verstanden haben, warum nicht, können Sie leicht eine Basis angeben.)