1) Wir definieren die Menge der $n \times n$ Matrizen, die in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine 1 haben. Alle anderen Einträge seien 0. Solche Matrizen nennt man Permutationsmatrizen.
a) Erklären Sie den Namen dieser Matrizen.
b) Bestimmen Sie die Anzahl der $n \times n$ Permutationsmatrizen.

2) Ein Endomorphismus f des Vektorraumes V heißt eine *Projektion*, wenn $f \circ f = f$ ist. (Vgl. Probeklausur.) Man bestimme eine Projektion f des $\mathbb{R}^2$ mit $(1,2) \in Kern\ f$ und $(1,-1) \in Bild\ f$. Begründen Sie (geometrisch), warum man diese Abbildung Projektion nennt.

3) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit

$$f(x,y,z) = (-9x + 4y - 2z, -25x + 11y - 5z, -5x + 2y).$$

Bestimmen Sie die zu f gehörende Matrix B bezüglich der Standardbasis. Berechnen Sie $B^2, B^3, \ldots$ und bestimmen Sie $f^2, f^3, f^4, \ldots$.

4a) Es sei $A = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 8 \\ -7 & -6 & -8 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Potenzen $A^0, A^1, A^2, \cdots$. Beweisen Sie Ihre Beobachtung allgemein.

b) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Potenzen $A^0, A^1, A^2, \cdots$. Beweisen Sie Ihre Beobachtung allgemein.
Zeigen Sie, daß $G = \{A^n, n \in \mathbb{Z}\}$ eine Untergruppe der $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ ist.
Hierbei ist $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ die Gruppe der invertierbaren 2×2 Matrizen mit ganzzahligen Einträgen. (Auch das Inverse muß ganzzahlige Einträge haben. Die 2×2 Einheitsmatrix ist das neutrale Element.)

(Zusatzaufgabe: Wenn man für Matrizen $\exp(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$ definiert, können Sie dann etwas über $\exp A$ sagen?)

5) Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ habe bezüglich der Standardbasen $B_1 = \{e_1, e_2\}$ und $B_1' = \{e_1', e_2', e_3'\}$ von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ die Matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme die Matrix A_2 von f bezüglich der Basen

$$B_2 = \{(1,0),\ (1,1)\} \text{ und } B_2' = \{(1,0,0),\ (2,1,0),\ (3,2,1)\}.$$