TU CLAUSTHAL
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. W. Klotz

Lineare Algebra I
WS 1999/2000
Alte Klausuraufgaben

Hinweis:
Die Semesterabschlußklausur findet am Samstag, 19.02.2000, von 8^{oo} (pünktlich!)- 10^{oo} in HA und HB statt. Als Hilfsmittel ist **ein** eigenhändig beschriebenes Blatt (das auf beiden Seiten beschrieben sein darf) zugelassen. Taschenrechner, Bücher, Skripte usw. sind nicht erlaubt.

Bitte bearbeiten Sie bis zur nächsten Tutorenübung folgende Aufgaben. Lösungen sind nicht abzugeben.

1. Sei $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Matrix von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basen

$$C_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Man berechne die Matrix A von f bezüglich der Standardbasen.
b) Man bestimme Kern f und Bild f.
c) Gibt es Basen C_3 und C_4, so daß $M(f, C_3, C_4)$ die Gestalt $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat?

2. Bestimmen Sie $\det A$ und A^{-1} von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Die Matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ definiert ein reelles Skalarprodukt β.

Der Unterraum U von $\mathbb{R}^3$ werde durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt.

Berechnen Sie die orthogonale Projektion $P_U \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ bezüglich des Skalarproduktes β.

(Tip: $\vec{x} \cdot \vec{y} = \beta\ (\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T\ M\vec{y}$.)

4. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die folgende Matrix A positiv definit?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Es sei

$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & & \\ 1 & 1 & -1 & & & & \\ & 1 & 1 & -1 & & & \\ & & & & & & \\ & & & & 1 & 1 & -1 \\ & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und $F_n = \det D_n$. Geben Sie eine Möglichkeit an, um F_n durch F_{n-1} und F_{n-2} auszudrücken, und berechnen Sie damit F_{10}.