1. Die Matrix $A \in K^{n\times n}$ habe die Einträge

$$a_{ij} = \begin{cases} a & \text{für } i = j \\ b & \text{für } i \neq j \end{cases} .$$

Man bestimme $\det A$ und $\operatorname{rg} A$.

2. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme in $\mathbb{R}^{3\times 3}$ alle Lösungen von $AX = B$.

3. Gegeben sei eine Basis $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ und die Matrix

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ bezüglich der Standardbasis.

Man gebe die Matrix der zu A gehörenden Abbildung φ_A bezüglich der Basis B an. (Hinweis: Satz 7.7.)

4. Die $n \times n$-Matrix A enthalte r Zeilen und s Spalten, in deren Schnitt lauter Nullen stehen. Man beweise: Ist $r + s > n$, dann ist $\det A = 0$.

5. Man bestätige für die "Vandermondesche Determinante"

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i > k} (x_i - x_k).$$