TU CLAUSTHAL
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. W. Klotz

Lineare Algebra I
WS 1999/2000
Übungsblatt 11

1.) Es sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Man beweise:

a) $\| \vec{x}+\vec{y} \|^2 + \| \vec{x}-\vec{y} \|^2 = 2(\| \vec{x} \|^2 + \| \vec{y} \|^2)$ (Parallelogrammgleichung),

b) $\vec{x}\cdot\vec{y} = \frac{1}{4}\left\{ \| \vec{x}+\vec{y} \|^2 - \| \vec{x}-\vec{y} \|^2 + i(\| \vec{x}+i\vec{y} \|^2 - \| \vec{x}-i\vec{y} \|^2)\right\}$.

Dabei ist im euklidischen Raum der Imaginärteil zu streichen.

2.) Eine Abbildung $N : V \to \mathbb{R}$ eines reellen oder komplexen Vektorraumes V heißt eine Norm, wenn für alle $\vec{x},\vec{y} \in V,\ \lambda \in K$ gilt:

(I) $N(\vec{x}) \geq 0,\ N(\vec{x}) = 0 \Longleftrightarrow \vec{x} = 0$,

(II) $N(\lambda\vec{x}) = |\lambda|\ N(\vec{x})$, (III) $N(\vec{x}+\vec{y}) \leq N(\vec{x}) + N(\vec{y})$.

Ein normierter Raum ist ein mit einer Norm N ausgestatteter Vektorraum. Die Norm N heißt euklidisch bzw. unitär, wenn sie gemäß $N(\vec{x}) = \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}$ aus einem Skalarprodukt hervorgeht. Man beweise für einen normierten Raum V:

a) Durch $d(\vec{x},\vec{y}) = N(\vec{x}-\vec{y})$ wird eine Metrik auf V definiert.

b) $|N(\vec{x}) - N(\vec{y})| \leq N(\vec{x}-\vec{y})$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} N(\vec{x_n}) = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} N(\vec{x_n}+\vec{y}) = N(\vec{y})$ (Stetigkeit der Norm)

3.) Man zeige: Ist V ein reeller Raum mit einer Norm N, die der Parallelogrammgleichung

$$N^2(\vec{x}+\vec{y}) + N^2(\vec{x}-\vec{y}) = 2(N^2(\vec{x}) + N^2(\vec{y}))$$

genügt, dann wird durch

$$\beta(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{4}\ (N^2(\vec{x}+\vec{y}) - N^2(\vec{x}-\vec{y}))$$

ein Skalarprodukt auf V definiert.
Allgemein gilt: Die Norm eines normierten Vektorraumes ist genau dann euklidisch bzw. unitär, wenn sie der Parallelogrammgleichung genügt.

4.) Sind die folgenden Funktionen Normen von $\mathbb{R}^n$? Welche Normen sind euklidisch?

a) $N_1(x_1,\dots,x_n) = \max\limits_i\ |x_i|$, b) $N_2(x_1,\dots,x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\ |x_i|$,

c) $N_3(x_1,\dots,x_n) = \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2 + \cdots nx_n^2}$, d) $N_4 = \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$,

e) $N_5(x_1,\dots,x_n) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2}$.

5a) Zeichnen Sie im $\mathbb{R}^2$ die Punkte, mit $||x|| = 1$, wobei $||\cdot||$ eine der Normen aus Aufgabe 4) bezeichne.

b) Zeigen Sie, daß im $\mathbb{R}^n$ die Normen aus 4a), b) und e) äquivalent sind. (Es gilt sogar, daß im $\mathbb{R}^n$ alle Normen äquivalent sind!)

c) Berechnen Sie die Normen des Vektors $(1,2,3)^t$, mit den Normen aus Aufgabe 4).