1. Berechnen Sie die QR-Zerlegung von
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 17/2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$
Ist die Zerlegung eindeutig?

2. Es sei
$$H = \{f \in \mathbb{R}_2[x] : \int\limits_0^1 f(x)\ dx = 3\}.$$
Man zeige, daß H eine Hyperebene des Raumes $\mathbb{R}_2[x]$ ist.

3. Es sei $V = C[0,1]$ der Raum der stetigen reellen Funktionen mit dem Skalarprodukt
$$\beta(f,g) = \int\limits_0^1 f(x)\ g(x)\ dx.$$
Es sei $h \in V, h(x) = \sin 2\pi x$. Man fasse $U = \mathbb{R}_1[x]$ als Unterraum von V auf und approximiere h "möglichst gut" durch ein Polynom $u_0 \in U$, d.h. man bestimme u_0 so, daß gilt:
$$d(h,U) = d(h,u_0).$$

4. Seien $a_1, \cdots, a_n$ reelle Zahlen. Man beweise:
$$(a_1 + \cdots a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \cdots a_n^2).$$

5. Es sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum, $A = \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m\} \subseteq V$. Die Gramsche Determinante von A wird definiert durch: $G_r(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m) = \det(\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j)$. Man zeige:

   (a) Sei B eine ONB von $[A]$. Die Matrix S habe in den Spalten die Koordinatenvektoren von A bzgl. B. Dann ist $(\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j) = S^T\overline{S}$.

   (b) $G_r(\vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_m) = |\det S|^2 > 0$, wenn A linear unabhängig ist.

   (c) $G_r(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$ ist linear abhängig.