TU CLAUSTHAL
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. W. Klotz

Lineare Algebra I
WS 1999/2000
Übungsblatt 3
Übung vom 11.11.99

1. Unter dem direkten Produkt $G \bigotimes H$ zweier Gruppen G und H versteht man das kartesische Produkt $G \times H$ versehen mit folgender Verknüpfung:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd).$$

Man zeige:

a) $G \bigotimes H$ ist eine Gruppe.
b) Konstruieren Sie mit Hilfe von a) eine nicht zyklische Gruppen G_1 mit 4 Elementen und eine Gruppe G_2 mit 6 Elementen. (Bemerkung: Es gilt $G_1 = C_2 \times C_2 \not\simeq C_4$ aber $G_2 = C_2 \times C_3 \simeq C_6$.)
c) Geben Sie alle (nichtisomorphen) Gruppen mit höchstens 7 Elementen an.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathbb{Z}_n$ die Menge der Restklassen modulo n, d.h. die Menge der Äquivalenzklassen der Kongruenz modulo n (siehe Tutorenübung 2, Aufg. 4). Es seien $K(a),\ K(b)$ die von den ganzen Zahlen a bzw. b repräsentierten Restklassen. Man zeige, daß durch die folgende Festsetzung eindeutig eine Addition und eine Multiplikation auf $\mathbb{Z}_n$ definiert werden:

$$K(a) + K(b) = K(a + b),\ \ K(a) \cdot K(b) = K(ab)$$

Ferner beweise man:

$(\mathbb{Z}_n, +)$ ist eine zyklische Gruppe der Ordnung n.
$(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ ist ein Ring. Ist n keine Primzahl, dann hat dieser Ring Nullteiler, d.h. Elemente $a, b \neq 0$ mit $ab = 0$.
$(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ ist genau dann ein Körper, wenn n eine Primzahl ist.

3. Es sei P_n die Einheitengruppe von $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$. Man zeige, daß P_n genau aus den Restklassen modulo n besteht, die von einer zu n teilerfremden Zahl repräsentiert werden, d.h.

$$P_n = \{K(a) | K(a) \text{ Restklasse modulo } n,\ ggT(a, n) = 1\}.$$

Die Euler Funktion $\varphi(n)$ wird definiert durch

$$\varphi(n) = |P_n| = |\{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq n,\ ggT(x, n) = 1\}|.$$

Beweisen Sie den kleinen Fermatschen Satz der Zahlentheorie:

$$ggT(a, n) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1 \text{ modulo } n.$$

4. Welchen Rest läßt 3^{657} bei Division durch 47?