1. Es sei $B = \{e_1, e_2, \ldots\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

$$e_j = (x_i)_{i \in \mathbb{N}},\ x_i = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Ist B linear unabhängig? Ist B eine Basis von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Es sei $V = [B]$. Man zeige, daß $B' = \{e_j + e_{j+1} : j = 1, 2, \cdots\}$ linear unabhängig ist. Ist B' eine Basis von V?

2. Es sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen und $M = \{\ \log p : p \in \mathbb{P}\}$.

Man zeige, daß M im Vektorraum $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig ist.

3. Man zeige, daß die Funktionen

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x^2 - 1}{x + n},\ n \in \mathbb{N}$$

über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind.

4. Wie muß man $a \in \mathbb{R}$ wählen, damit der von den Vektoren

$$(a, 9, 0), \quad (1, a, 0), \quad (0, 5, a)$$

in $\mathbb{R}^3$ aufgespannte Unterraum minimale Dimension hat?