TU CLAUSTHAL
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. W. Klotz

Lineare Algebra I
WS 1999/2000
Übungsblatt 6

1. Es sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung. Es sei $\varphi(1,1) = (1,0,-2)$ und $\varphi(1,2) = (0,1,-1)$. Man bestimme $\varphi(7,12)$ und $\varphi(x,y)$.

Endliche Körper

2. Es sei K ein Körper mit endlicher Charakteristik $p, (p \neq 0)$.
a) Zeigen Sie, daß p eine Primzahl sein muß.
b) Es sei $P = \{0, 1, 1+1, 1+1+1, ..., p-1 = 1 + ... + 1\}$ der Primkörper von K. Zeigen Sie, daß K ein Vektorraum über P ist.
c) Zeigen Sie, daß die Elementezahl von K eine Primzahlpotenz p^m sein muß.

3.a) Es sei $\mathbb{Z}_2 = (\{0,1\}, +, \cdot)$ der Körper mit 2 Elementen. Geben Sie die Additions- und Multiplikationsregeln in $\mathbb{Z}_2$ an.
b) Zeigen Sie, daß das Polynom $f = x^2 + x + 1$ über $\mathbb{Z}_2$ nicht in zwei Faktoren zerfallen kann.
c) Zeigen Sie, daß die 4 Polynome $0, 1, x, x+1$ modulo f einen Körper mit 4 Elementen bilden. Geben Sie die Additions- und Multiplikationstafeln an.

Analog kann man für jede Primzahlpotenz p^n einen Körper mit p^n Elementen konstruieren: Man nehme ein geeignetes, über $\mathbb{Z}_p$ unzerlegbares Polynom f vom Grad n. Ausgehend von den Polynomen über $\mathbb{Z}_p$ bildet man $\mathbb{Z}_p[x]/f$. Dieser Körper mit p^n Elementen kann als Vektorraum der Dimension n über $\mathbb{Z}_p$ aufgefaßt werden.

4. Betrachten Sie den Vektorraum $(\mathbb{Z}_2)^3$.
a) Zählen Sie alle Untervektorräume auf. Versuchen Sie, sich diese geometrisch zu veranschaulichen.
b) Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Basen von $(\mathbb{Z}_2)^3$.