1. Die Abbildungen $S, T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien definiert durch

$$S(x, y, z) = (y, z, x),\ T(x, y, z) = (x + y + z, 0, 0).$$

Man bestimme:
a) $(S \circ T)\ (1, 0, 1)$,
b) $(T \circ S)\ (1, 0, 1)$,
c) $(S + T)\ (1, 0, 1)$,
d) $S^{-1} \circ (S + T) \circ T(1, 0, 1)$,
e) Kern $(S + T)$.

2. Es sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit

$$\text{Kern } T = \{(x, y, z) : 2x - y + z = 0\}.$$

Ferner sei $T(0, 0, 1) = (1, 2, 3)$. Man bestimme $T(1, 0, 0)$ und $T(0, 1, 0)$.

3. Es sei V der von $A = \{a_1 = e^t, a_2 = \sin t, a_3 = \cos t\}$ erzeugte Vektorraum. Zeigen Sie, daß auch

$$B = \{b_1 = e^t - 2\sin t, b_2 = \sin t + \cos t, b_3 = e^t + \sin t + 2\cos t\}$$

eine Basis von V ist.

Eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ sei definiert durch

$$\varphi(b_1) = e^t, \varphi(b_2) = e^t + \sin t, \varphi(b_3) = 2e^t.$$

Berechnen Sie $\varphi(e^t), \varphi(\sin t)$ und $\varphi(\cos t)$.

4. V, W und U seien endlich dimensionale Vektorräume und $f : V \to W$ und $g : W \to U$ seien lineare Abbildungen. Zeigen Sie:
a) $g \circ f$ ist linear.
b) $\dim \text{Bild }(g \circ f) \leq \min(\dim \text{Bild}\, g, \dim \text{Bild}\, f)$.
c) $\dim \text{Kern}(g \circ f) \geq \dim \text{Kern} f$.