TU CLAUSTHAL
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. W. Klotz

Lineare Algebra I
WS 1999/2000
Übungsblatt 8

1. Es seien B und B' Basen des Vektorraumes V und $A \in K^{n\times n}$ die Matrix der Basistransformation $B' \longrightarrow B$. Sind $\vec{x}_B = (x_1, \cdots, x_n)^T$ und $\vec{x}_{B'} = (x'_1, \cdots, x'_n)^T$ die Koordinatenvektoren von $\vec{x}$ bzgl. B bzw. B' in Spaltenform, dann besteht die folgende Koordinatentransformation:

$$\vec{x}_{B'} = A\,\vec{x}_B. \text{ Beweisen Sie dies.}$$

2. Auf dem 2. Übungsblatt haben wir die Abbildung $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^3$ mit

$$f(x,y,z) = \begin{cases} (x+2z, z, y-x-z) & \text{falls } x < y-z \\ (2y-x, y, x-y+z) & \text{falls } y-z < x < 2y \\ (x-2y, x-y+z, y) & \text{falls } x > 2y \end{cases}$$

betrachtet. Schreiben Sie diese Abbildung mit Matrizen bezüglich der Standardbasis. Nennen wir diese drei Matrizen A, B, C. Beweisen Sie:
a) $A = C^{-1}$
b) $B = B^{-1}$
c) Zeigen Sie damit erneut: $f \circ f = id$.
d) Berechnen Sie die Potenzen $A, A^2, A^3, \cdots$.
e) Berechnen Sie $BA, BA^2, \cdots, BA^6$.
f) Zeigen Sie, daß $AB = BA^5$ gilt.
g) Zeigen Sie, daß die Produkte der Matrizen A, B und C eine endliche Gruppe erzeugen. Wieviele Elemente hat diese Gruppe?

3. Es sei $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Geraden $x+y=0$. Man zeige, daß σ ein Automorphismus von $\mathbb{R}^2$ ist, und bestimme die Matrix von σ bezüglich der Standardbasis.

4. Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{4\times 4},\ a_{ij} = i^2 + j^2$. Man bestimme rgA.