TU CLAUSTHAL
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. W. Klotz

Lineare Algebra I
WS 1999/2000
Übungsblatt 9

1. Die Spur einer Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ ist definiert durch:

$$Spur\ A \ = \ a_{11} \ + \ a_{22} \ + \ \cdots \ + \ a_{nn}.$$

Man zeige:

a) Spur ist eine Linearform auf $K^{n\times n}$.
b) Jede Linearform f auf $K^{n\times n}$ hat die Form
$f(A) =$ Spur (BA) mit einer eindeutig bestimmten Matrix B.
c) Spur $(AB) =$ Spur (BA),
d) Spur $(B^{-1}AB) =$ Spur A,
e) Spur $(AX) = 0$ für alle $X \in K^{n\times n} \Longrightarrow A = 0$.

2. Es sei $(G, +, \cdot)$ die Menge der Matrizen $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, versehen mit der normalen Matrizenaddition und Multiplikation. Es sei $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Finden Sie ein Element $I \in G$ mit $I^2 = -E$.
b) Zeigen Sie: $(G, +, \cdot) \simeq \mathbb{C}$.
c) Folgern Sie: Für alle $A, B \in G$ gilt: $AB = BA$.

3. Es sei

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ferner sei E die 4×4-Einheitsmatrix. Man zeige:

a) $I^2 = J^2 = K^2 = -E,\ IJ = K,\ JK = I,\ KI = J$. Berechnen Sie auch JI, KJ und IK.
b) Der von E, I, J, K in $\mathbb{R}^{4\times 4}$ aufgespannte Unterraum H ist ein nicht kommutativer Körper (Schiefkörper). H heißt Quaternionenschiefkörper. Schreibt man statt $\alpha E, \beta I, \gamma J, \delta K$ kurz: $\alpha, \beta i, \gamma j, \delta k$, dann haben die Quaternionen die Form

$$\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

Man erkennt hieraus, daß H als Erweiterung von $\mathbb{C}$ aufgefaßt werden kann.