Technische Universität Clausthal
Institut für Mathematik
Prof. Dr. L. G. Lucht

WS 1999/2000
20.10.1999

Elementare Zahlentheorie

Diese Aufgaben werden in der Übungsstunde vom 27.10. besprochen;
Lösungen sollen nicht abgegeben werden.

1. Finden Sie notwendige Bedingungen an $k \in \mathbb{N}$ derart, daß $2^k + 1$ oder $2^k - 1$ prim sind.

2. Es sei $n \in \mathbb{N}$ gerade. Zeigen Sie, daß n genau dann vollkommen ist, wenn n von der Form $2^k\,(2^{k+1} - 1)$ mit einer Primzahl $2^{k+1} - 1$ ist.

3. Ermitteln Sie alle Lösungen $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ von $x^2 + y^2 = z^2$.

4. Es seien $g, k \in \mathbb{N}$ fest, und jedes $n \in \mathbb{N}$ besitze eine Darstellung
$$n = n_1^k + \cdots + n_g^k \quad \text{mit} \quad n_1, \ldots, n_g \in \mathbb{N}_0\,.$$
Zeigen Sie die Ungleichung
$$g \geq \left[\left(\frac{3}{2} \right)^k \right] + 2^k - 2\,.$$

5. Zeigen Sie, daß es unendlich viele Primzahlen gibt.

6. Für $x \geq 1$ sei $A(x)$ die Anzahl der Zahlenpaare $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ mit $a^2 + b^2 \leq x$. Zeigen Sie die Existenz einer Konstanten $c > 0$ mit
$$|A(x) - \pi\, x| \leq c\,\sqrt{x}\,.$$