Technische Universität Clausthal
Institut für Mathematik
Prof. Dr. L. G. Lucht

WS 1999/2000
25.10.1999
1. Übungsblatt

Elementare Zahlentheorie

Diese Aufgaben werden in der Übungsstunde vom 3.11.1999 besprochen;
Abgabe schriftlicher Lösungen bitte am Montag, 1.11.1999, vor der Vorlesung.

1. Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $$\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right],$$ (b) $$\sum_{\nu=0}^{n-1}\left[x + \frac{\nu}{n}\right] = [nx].$$

2. Für genau welche $n \in \mathbb{N}$ ist $\prod\limits_{1\le\nu\le n} \nu$ teilbar durch $\sum\limits_{1\le\nu\le n} \nu$?

3. Es bezeichne p_k die k-te Primzahl. Verwenden Sie den Euklidischen Beweis für die Unendlichkeit der Primzahlmenge zum Nachweis der Ungleichung
$$p_k < 2^{2^{k-1}} \qquad (k \ge 2).$$

4. Modifizieren Sie den Euklidischen Beweis für die Unendlichkeit der Primzahlmenge, um zu zeigen, daß es jeweils unendlich viele Primzahlen der Form $4n-1$ bzw. $6n-1$ $(n \in \mathbb{N})$ gibt.

5. Zeigen, Sie, daß es keine Lösungen der Gleichung $x^4 - y^4 = z^2$ mit ganzzahligen $x, y, z \ge 1$ gibt.