

Elementare Zahlentheorie

Diese Aufgaben werden in der Übungsstunde vom 10.11.1999 besprochen;
Abgabe schriftlicher Lösungen bitte am Montag, 8.11.1999, vor der Vorlesung.

1. Zeigen Sie, daß die diophantische Gleichung $4655x + 12075y = 805$ lösbar ist, und bestimmen Sie sämtliche Lösungen.
2. Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein Markstück in 50 - , 10 - und 5 - Pfennigstücke zu wechseln? Können Sie ein allgemeines Verfahren hierfür beschreiben?
3. (a) Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $a^2 + b^2 + c^2 > 0$. Zeigen Sie, daß die diophantische Gleichung $ax + by + cz = d$ genau dann lösbar ist, wenn $(a, b, c) \mid d$ gilt.
(b) Lösen Sie die diophantische Gleichung

$$1819x + 3587y + 170z = d, \quad \text{wobei } d := (1819, 3587, 170).$$

4. Es sei $2 \leq a \in \mathbb{N}$ und $A_n := a^{2^n} + 1$ für $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Bestimmen Sie (A_m, A_n) für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$.
 - (b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), daß es unendliche viele Primzahlen gibt.
5. (a) Berechnen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus $\text{ggT}(13, 8)$. Bestimmen Sie eine Linearkombination mit $\text{ggT}(13, 8) = 13a + 8b$ und $a, b \in \mathbb{Z}$.
(b) Zeigen Sie, daß für die Anzahl $m(a, b)$ der Schritte im Euklidischen Algorithmus mit geeigneten positiven Konstanten c_1, c_2 gilt:

$$c_1 \log x \leq \max_{1 \leq b \leq a \leq x} m(a, b) \leq c_2 \log x.$$

Können Sie (ohne Beweis) angeben, wie gut man diese Konstanten für großes x wählen kann?