Technische Universität Clausthal
Institut für Mathematik
Prof. Dr. L. G. Lucht

WS 1999/2000
8.11.1999
3. Übungsblatt

Elementare Zahlentheorie

Diese Aufgaben werden in der Übungsstunde vom 17.11.1999 besprochen;
Abgabe schriftlicher Lösungen bitte am Montag, 15.11.1999, vor der Vorlesung.

1. Für welche $a, b \in \mathbb{Z}$ und $A, B \in \mathbb{N}$ gilt
$$\frac{a}{A} + \frac{b}{B} = \frac{a+b}{A+B} \ ?$$

2. (a) Es sei $2 < q \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß die Summe aller Elemente eines primen Restsystems $\operatorname{mod} q$ durch q teilbar ist.

   (b) Es sei $p \geq 3$ prim. Zeigen Sie die Kongruenz
$$1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (p-2)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \mod p\,.$$

3. Zu $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$ mit $(a, q) = 1$ sei $h := \min\{k \in \mathbb{N} : a^k \equiv 1 \mod q\}$. Zeigen Sie für $m \in \mathbb{N}$:
$$a^m \equiv 1 \mod q \quad \iff \quad h \mid m\,.$$

4. Zeigen Sie $\varphi(m\,n)\,\varphi((m,n)) = (m,n)\,\varphi(m)\,\varphi(n)$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

5. Es seien $a, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ derart, daß $a^{n-1} \equiv 1 \mod n$, aber $a^d \not\equiv 1 \mod n$ für alle echten Teiler d von $n-1$ gelten. Zeigen Sie, daß n prim ist.