Technische Universität Clausthal
Institut für Mathematik
Prof. Dr. L. G. Lucht

WS 1999/2000
15.11.1999
4. Übungsblatt

Elementare Zahlentheorie

Diese Aufgaben werden in der Übungsstunde vom 24.11.1999 besprochen;
Abgabe schriftlicher Lösungen bitte am Montag, 22.11.1999, vor der Vorlesung.

1. Bestimmen Sie ggf. alle Lösungen der folgenden Kongruenzen:

   (a) $20\,x \equiv 30 \bmod 4\,;$

   (b) $15\,x \equiv 0 \bmod 35\,;$

   (c) $15\,x \equiv 25 \bmod 35\,;$

   (d) $353\,x \equiv 254 \bmod 400\,.$

2. Bestimmen Sie ggf. die Lösungen folgender Kongruenzsysteme:

   (a) $$\begin{aligned} x &\equiv 1 \bmod 8 \\ x &\equiv 2 \bmod 25 \\ x &\equiv 3 \bmod 11\,; \end{aligned}$$

   (b) $$\begin{aligned} 4x &\equiv 7 \bmod 15 \\ 5x &\equiv 2 \bmod 21 \\ 49x &\equiv 7 \bmod 35\,. \end{aligned}$$

3. Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$ teilerfremd und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die Existenz eines $x \in \mathbb{Z}$ mit $\operatorname{ggT}(ax + b, n) = 1$.

   (Hinweis: Es sei p ein Primteiler von n. Die Kongruenz $ax + b \equiv 0 \bmod p$ ist lösbar genau für $p \nmid a$. Chinesischer Restsatz.)

4. Es seien $a \in \mathbb{Z}$ und p prim mit $p \nmid 2a$. Zeigen Sie, daß die Kongruenz $x^2 \equiv a \bmod p^k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ lösbar ist, wenn sie für $k = 1$ lösbar ist.

5. (a) Beweisen Sie: 561 ist keine Primzahl, aber dennoch gilt $x^{561} \equiv x \bmod 561$ für alle $x \in \mathbb{Z}$.

   (b) Eine zusammengesetzte Zahl n heißt Carmichaelzahl, wenn $x^n \equiv x \bmod n$ für alle x mit $(n, x) = 1$ gilt.

   Zeigen Sie: Wenn die drei Zahlen $6m + 1$, $12m + 1$ und $18m + 1$ alle prim sind, dann ist die Zahl $n = (6m+1)(12m+1)(18m+1)$ eine Carmichaelzahl. Geben Sie ein Beispiel für eine solche Zahl an.