Technische Universität Clausthal
Institut für Mathematik
Prof. Dr. L. G. Lucht

WS 1999/2000
22.11.1999
5. Übungsblatt

Elementare Zahlentheorie

Diese Aufgaben werden in der Übungsstunde vom 01.12.1999 besprochen;
Abgabe schriftlicher Lösungen bitte am Montag, 29.11.1999, vor der Vorlesung.

1. Bestimmen Sie sämtliche Lösungen der Kongruenzen

   (a) $x^4 + x^3 - 5x^2 + 5x - 5 \equiv 0 \bmod 27\,;$

   (b) $x^{20} + x^{16} + x^{15} + 3x^9 - x^8 - 5 \equiv 0 \bmod 15\,.$

2. Es sei $f(x)$ ein nicht-konstantes ganzzahliges Polynom. Zeigen Sie, daß die Kongruenz $f(x) \equiv 0 \bmod p$ für unendlich viele Primzahlen p lösbar ist (Sprechweise: $f(x)$ hat unendlich viele Primteiler).

3. Es seien $p \geq 3$ prim und $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $p \nmid a$. Zeigen Sie, daß $a\,x^2 + b\,x + c \equiv 0 \bmod p$ genau dann lösbar ist, wenn $y^2 \equiv b^2 - 4ac \bmod p$ lösbar ist.

4. Zu einer Primzahl $p \geq 3$ bezeichne S die Summe und P das Produkt der quadratischen Reste $\bmod\, p$. Zeigen Sie:

   (a) Im Fall $p > 3$ gilt $S \equiv 0 \bmod p\,.$

   (b) Für $p \geq 3$ ist $P \equiv \pm 1 \bmod p$, je nachdem ob $p \equiv \mp 1 \bmod 4$ gilt.

5. Für welche $n \in \mathbb{N}$ existieren $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $\operatorname{ggT}(x, n) = \operatorname{ggT}(y, n) = 1$ derart, daß $x^2 + y^2 \equiv 0 \bmod n$ gilt?

   (Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall, daß n prim ist. Wenden Sie dann das Ergebnis der Aufgabe 4 von Übungsblatt 4 an.)