Technische Universität Clausthal
Institut für Mathematik
Prof. Dr. L. G. Lucht

WS 1999/2000
17.01.2000
10. Übungsblatt

Elementare Zahlentheorie

Diese Aufgaben werden in der Übungsstunde vom 26.01.2000 besprochen;
Abgabe schriftlicher Lösungen bitte am Montag, 24.01.2000, vor der Vorlesung.

1. (a) Zeigen Sie die Existenz einer Konstanten $A > 1$ derart, daß für $x \geq 2$ stets eine Primzahl p mit $x < p \leq A\,x$ existiert.

   (b) Es bezeichne p_n die n-te Primzahl. Zeigen Sie die Existenz von positiven Konstanten $a < b$ mit $a\,n\,\log n < p_n < b\,n\,\log n$ für $n \geq 2$.

2. Für $x > 0$ sei $\pi_2(x) := \sum\limits_{\substack{p,q\in\mathbb{P}\\ pq\leq x}} 1$ und $\theta_2(x) := \sum\limits_{\substack{p,q\in\mathbb{P}\\ pq\leq x}} \log(pq)$. Zeigen Sie:

   (a) Es gilt $\theta_2(x) = 2 \sum\limits_{p\leq\frac{x}{2}} \theta\Big(\dfrac{x}{p}\Big)$.

   (b) Es gibt positive Konstanten $A < B$ mit
   $$A\,\frac{x\,\log\,\log x}{\log x} \leq \pi_2(x) \leq B\,\frac{x\,\log\,\log x}{\log x} \qquad (x \geq 3).$$

3. Es sei $\omega(n)$ die Anzahl der Primteiler von $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die Existenz einer Konstanten c mit
   $$\sum_{n\leq x} \frac{\omega(n)}{n} = \log x\,\log\log x + c\,\log x + \gamma\,\log\log x + \mathcal{O}(1) \qquad (x \geq 3).$$
   Dabei bezeichnet γ die Euler-Mascheroni-Konstante.

4. Zeigen Sie, daß es eine Konstante $C \geq 0$ gibt mit

   (a) $$\sum_{p\leq x} \log\Big(1-\frac{1}{p}\Big) = -\log\,\log x - C + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\log x}\Big) \qquad (x \geq 2),$$

   (b) $$\prod_{p\leq x} \Big(1-\frac{1}{p}\Big) = \frac{e^{-C}}{\log x} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\log^2 x}\Big) \qquad (x \geq 2).$$