Technische Universität Clausthal
Institut für Mathematik
Prof. Dr. L. G. Lucht

WS 1999/2000
24.01.2000
11. Übungsblatt

Elementare Zahlentheorie

Diese Aufgaben werden in der Übungsstunde vom 02.02.2000 besprochen;
Abgabe schriftlicher Lösungen bitte am Montag, 31.01.2000, vor der Vorlesung.

1. (a) Geben Sie die Gruppenstruktur von $G(q) = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ für $q = 1, \dots, 16$ an (kein Beweis, evtl. ein Stichwort als Begründung.)
   (b) Geben Sie alle Dirichletcharaktere (in Form einer Charaktertafel) für eine repräsentative Auswahl von $q = 1, \dots, 16$ an, etwa $q = 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12, 15, 16$.
   (c) Vergleichen Sie die Fälle $q = 5, 8, 10, 12$. Können Sie einen „Grund" angeben, warum die Charaktere modulo 8 alle reell sind?

2. Beweisen Sie Satz 2 der Vorlesung.
   (a) Für $\chi \in \widehat{G}(q)$ gilt $\displaystyle\sum_{n \in G(q)} \chi(n) = \begin{cases} \varphi(q) & \text{für } \chi = \chi_0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
   (b) Für $n \in G(q)$ gilt $\displaystyle\sum_{\chi \in \widehat{G}(q)} \chi(n) = \begin{cases} \varphi(q) & \text{für } n \equiv 1 \bmod q \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
   (c) Wenn Sie $\displaystyle\sum_{\chi \in \widehat{G}(q)} \sum_{n \in G(q)} \chi(n)$ betrachten, können Sie einen neuen Beweis von $|\widehat{G}(q)| = \varphi(q)$ angeben.
   Hinweis: Sie können in (b) das Ergebnis $|G(q)| = |\widehat{G}(q)|$ aus der Vorlesung verwenden. Um in (c) einen neuen Beweis zu erhalten, sollten Sie es dann nicht direkt einsetzen.

3. Es sei $q = 5$ und $b \in \{1, 2, 3, 4\}$.
   (a) Geben Sie eine aus Dirichletcharakteren zusammengesetzte Funktion f an, so daß $f(n) = 1$ für $n \equiv b \bmod 5$ und $f(n) = 0$ sonst gilt.
   (b) Zeigen Sie $L(\chi\,,\,1) \neq 0$ für alle Dirichletcharaktere modulo 5. Zeigen Sie, daß $L(\chi\,,\,1)$ für alle $\chi \neq \chi_0$ nicht reell ist. Was passiert für $\chi = \chi_0$?
   (c) Folgern Sie, daß $\displaystyle\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\chi(p)}{p}$ für $\chi \neq \chi_0$ konvergiert (Hinweis: Eulerprodukt).
   (d) Zeigen Sie $\displaystyle\sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv b \bmod 5}} \frac{1}{p} \sim \frac{1}{4} \log\log x$ und folgern Sie, daß es in jeder primen Restklasse modulo 5 unendlich viele Primzahlen gibt.