**Technische Universität Clausthal** **WS 1999/2000**
**Institut für Mathematik** **13.12.1999**
**Prof. Dr. L. G. Lucht** **8. Übungsblatt**

# Elementare Zahlentheorie

Diese Aufgaben werden in der Übungsstunde vom 12.01.2000 besprochen;
Abgabe schriftlicher Lösungen bitte am Montag, 10.01.2000, vor der Vorlesung.

1. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $$\sum_{d|n} \mu(d)\,\tau\Big(\frac{n}{d}\Big) = 1\,,$$
   (b) $$\sum_{d|n} \mu(d)\,\tau(d) = (-1)^{\omega(n)}\,,$$
   (c) $$\sum_{d^2|n} \mu(d) = \mu^2(n)\,,$$
   (d) $$\sum_{d|n} \mu(d)\,\varphi(d) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2 \mid n\,.$$

2. Es sei
   $$\Phi_m(z) = \prod_{d|m} \big(z^{\frac{m}{d}} - 1\big)^{\mu(d)} \qquad (m \in \mathbb{N}\,,\ z \in \mathbb{C}\,,\ |z| \neq 1).$$
   Zeigen Sie
   $$\prod_{m|n} \Phi_m(z) = z^n - 1\,.$$

3. Der Träger von $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ ist die Menge $\operatorname{supp} f := \{n \in \mathbb{N} : f(n) \neq 0\}$. Zeigen Sie, daß $f$ additiv ist, wenn $\operatorname{supp}(\mu * f) \subseteq \mathbb{P}^*$ gilt.

4. (a) Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ mit $f(1) \neq 0$. Zeigen Sie, daß es genau zwei Funktionen $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ mit $g * g = f$ gibt.

   (b) Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ multiplikativ. Zeigen Sie, daß es genau eine multiplikative Funktion $g$ mit $g * g = f$ gibt.

   (c) Die Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ sei zunächst auf $\mathbb{P}^*$ erklärt durch $g(p^k) = (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k}$ für $p^k \in \mathbb{P}^*$ und werde dann von $\mathbb{P}^*$ auf $\mathbb{N}$ multiplikativ fortgesetzt. Zeigen Sie $g * g = 1$. (Hinweis: Binomische Reihe)