**Technische Universität Clausthal**
**Institut für Mathematik**
**Prof. Dr. L. G. Lucht**

**WS 1999/2000**
**10.01.2000**
**9. Übungsblatt**

# Elementare Zahlentheorie

Diese Aufgaben werden in der Übungsstunde vom 19.01.2000 besprochen;
Abgabe schriftlicher Lösungen bitte am Montag, 17.01.2000, vor der Vorlesung.

1. Für $a, n \in \mathbb{N}$ sind die Ramanujan-Summen $c_n(a)$ erklärt als Summe der $a$-ten Potenzen der $n$-ten primitiven Einheitswurzeln $e^{2\pi i\nu/n}$ mit $1 \le \nu \le n$, $\operatorname{ggT}(\nu, n) = 1$. Es sei weiter $\eta_a(n) = n$ für $n \mid a$ und $\eta_a(n) = 0$ für $n \nmid a$.
   (a) Zeigen Sie $c_n(a) = \big(\mu * \eta_a\big)(n)$.
   (b) Beweisen Sie, daß $c_n(a)$ für jedes $a \in \mathbb{N}$ eine multiplikative Funktion von $n$ ist.
   (c) Bestimmen Sie $c_n(a)$ für Primzahlpotenzen $n = p^k$.

2. Die arithmetische Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ besitzt die erzeugende Dirichletschen Reihe $\widetilde{h}(s) := \sum_{n=1}^{\infty} h(n)\, n^{-s}$ $(s \in \mathbb{C})$. Zeigen Sie: Hat $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ die Darstellung $f = 1 * h$ mit einer arithmetischen Funktion $h$, für die $\widetilde{h}(1)$ absolut konvergiert, so hat $f$ einen Mittelwert $M(f) := \lim\limits_{x\to\infty} x^{-1} \sum\limits_{n \le x} f(n)$, und es gilt $M(f) = \widetilde{h}(1)$.

3. Verwenden Sie die Idee von Aufgabe 2 zum Nachweis von
$$\sum_{n \le x} \mu^2(n) = \frac{6}{\pi^2}\, x + \mathcal{O}(\sqrt{x}) \qquad (x \ge 1).$$

4. Zeigen Sie, daß es reelle Konstanten $A, B$ gibt mit
   (a) $$\sum_{n \le x} \frac{\mu^2(n)}{n} = \frac{6}{\pi^2}\, \log x + A + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big) \qquad (x \ge 1),$$
   (b) $$\sum_{2 \le n \le x} \frac{1}{n\, \log n} = \log\, \log x + B + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x\, \log x}\Big) \qquad (x \ge 2).$$