Math. Semesterber. (2007)
DOI 10.1007/s00591-006-0014-7

FORSCHUNG, LEHRE UND ANWENDUNG

Ch. Elsholtz · A. Mütze

Sudoku im Mathematikunterricht

Eingegangen: 25. Juli 2006 / Angenommen: 02. November 2006

Zusammenfassung Sudoku ist ein immer populärer werdendes Rätsel. Wir sind der Meinung, dass es sich hervorragend für den Mathematikunterricht auf verschiedenen Niveaustufen eignet: einerseits zum Trainieren elementarer Logik, andererseits aber (und hier liegt unser Schwerpunkt) zur Abstraktion ausgehend von Konkretem. Schüler können anhand von Beispielen eigenständig Lösungstrategien entdecken und, unter Anleitung, als allgemeines Prinzip formulieren.

Wir stellen zunächst das Rätsel vor, leiten systematisch Lösungstechniken her und zeigen an Beispielen, dass damit auch recht schwere Sudokus gelöst werden können. Dann stellen wir Hintergrundinformation zur Verfügung und geben Hinweise zu weiterführenden Informationsquellen. Weiterhin diskutieren wir eine neue Sudokuvariante mit hoher Symmetrie und eine Möglichkeit, für ein gegebenes Gitter die minimal notwendige Anzahl von Hinweisen abzuschätzen.

Schlüsselwörter Sudoku · Mathematikunterricht · lateinische Quadrate · Rätsel · systematisches Lösen

Mathematics Subject Classification (2000) 05B15 · 97-01

1 Einleitung

Sudoku ist ein immer populärer werdendes Rätsel. Frühe Versionen gehen auf französische Zeitungen um 1892 bzw. 1895 zurück. Dies wurde um 1979 unter dem Namen „number place" in Indianapolis und ab 1984 in Japan unter dem

Ch. Elsholtz (✉)
Department of Mathematics, Royal Holloway, Egham, Surrey TW20 0EX, UK
E-mail: christian.elsholtz@rhul.ac.uk

A. Mütze
School of Engineering, University of Warwick, Coventry, CV4 7AL, UK
E-mail: a.muetze@warwick.ac.uk

Namen Sudoku wieder aufgegriffen. Der japanische Name bedeutet auf deutsch etwa „einzelne Ziffern“.[1]

Anlässlich eines Japanbesuchs im Jahre 1997 wurde Wayne Gould, ein ehemaliger Richter in Hongkong, auf Sudoku aufmerksam. Da er kurz nach der Rückgabe von Hongkong an China in Ruhestand trat, hatte er genug Zeit für sein neues Hobby [3,4]. Ihm gelang es, die Redaktion der Londoner Times von Sudoku zu überzeugen. Seit dem 12. November 2004 veröffentlicht die Times täglich diese Rätsel. Diese Neuerung fand schnell große Begeisterung bei den Lesern. Schnell sprangen zahlreiche andere Zeitungen auf diesen Erfolgszug auf. Heute hat Sudoku internationale Popularität gewonnen. Es gibt mittlerweile hunderte Bücher mit immer neuen Rätseln und Varianten. Viele der Rätsel sind computergeneriert. Einige Zeitungen, wie auch der japanische Nikoliverlag, der Sudoku als Warenzeichen schützen ließ, bevorzugen von Hand entworfene Sudokus [5].

In England handelt es sich dabei bereits um ein Massenphänomen, das die Kreuzworträtsel längst verdrängt hat. In Deutschland ist das Rätsel auch schon weit verbreitet[2], aber noch lange nicht so sehr wie in England. Spötter machen sich angesichts der kollektiven Zeitverschwendung Sorgen um die Volkswirtschaft. Für eine detailliertere Skizze der Geschichte verweisen wir auf [6,7,8][3]. Für einen Bericht über die internationale Sudoku-Massenhysterie verweisen wir auf [9].

Das Rätsel besteht aus einem Gitter mit 9×9 Feldern, von denen einige mit Ziffern 1 bis 9 markiert sind. Ziel ist es, alle Felder so mit den Ziffern 1 bis 9 zu füllen, dass jede Ziffer in jeder Reihe, Spalte und vordefinierter 3×3-Box genau einmal vorkommt. Bei einem korrekt gestellten Sudoku ist die Lösung dabei eindeutig (Abb. 1 und 2).

Die Einfachheit dieser Regeln und die Tatsache, dass es Rätsel verschiedenster Schwierigkeitsstufen gibt, haben zu dem Erfolg von Sudoku in allen Altersstu-

	1			7			3	9
		7	2		1	4		
2	8			5			6	
1	4		5		9			
5				8				3
			3		6		2	4
	6			4			8	5
		1	9		2	3		
9	7			3			1	

Abb. 1 Anfangsstellung der Ziffern („Hinweise“) eines sehr einfachen Sudokus, siehe [10]

4	1	5	6	7	8	2	3	9
6	3	7	2	9	1	4	5	8
2	8	9	4	5	3	7	6	1
1	4	3	5	2	9	8	7	6
5	2	6	7	8	4	1	9	3
7	9	8	3	1	6	5	2	4
3	6	2	1	4	7	9	8	5
8	5	1	9	6	2	3	4	7
9	7	4	8	3	5	6	1	2

Abb. 2 Eindeutige Lösung des Sudokus von Abb. 1

[1] Wie Bailey, Cameron und Connelly [1] bemerken, tauchte eine Klasse von Designs, die Sudokus als Spezialfall enthalten, bereits 1956 in Arbeiten von Behrens [2] im Zusammenhang mit Versuchsanordnungen in der Landwirtschaft auf (siehe Abschnitt 5.1).

[2] Der Stern vom 23. Mai 2006 titelte gar „Volkssport Sudoku“.

[3] Man beachte, dass die zitierten Wikipediaartikel in verschiedenen Sprachen nicht identisch sind, und z.B. verschiedene Jahreszahlen nennen, und dass sie fortwährend bearbeitet werden.

fen und gesellschaftlichen Schichten beigetragen. Es macht darüber hinaus Spaß, beim Lösen eines konkreten Rätsels intuitiv eigene Lösungsstragien zu entdecken. In diesem Artikel versuchen wir, diese Lösungsstrategien nicht nur in Umgangssprache, sondern in mathematischer Sprache zu formulieren. Wir hoffen, dass der Enthusiasmus der Schüler vom „normalen“ Sudokulösen auch auf dieses formale Nachdenken über die Lösungsstrategie übertragen werden kann.

Viele britische Zeitschriften werben damit, dass man „nur Logik, aber keine Mathematik“ zum Lösen benötige. Diese vermeintliche Trennung von Mathematik und Logik wird dem mathematisch vorgebildeten Leser sicher nicht einleuchten. Gemeint ist, dass man mit den in dem Rätsel vorkommenden Ziffern nicht rechnen muss, und man die Ziffern auch durch neun andere Symbole ersetzen könnte. Es verbirgt sich aber auch die Annahme dahinter, dass Mathematik in der Zielgruppe dieser Zeitungen unpopulär ist.

Im Gegensatz dazu sind wir der Meinung, dass sich das Rätsel hervorragend für den Mathematikunterricht aller Altersstufen eignet. Es wurde bereits darauf hingewiesen, dass bereits Grundschüler Sudokus lösen und dabei ihre Logik trainieren können [11, 12, 13]. Auch für Vertretungsstunden ist Sudoku bereits vielfach im Einsatz. Im Unterschied dazu haben wir in diesem Artikel Schüler der Sekundarstufen im Blickpunkt. Schüler können anhand von Beispielen eigenständig Lösungsstrategien entdecken und, unter Anleitung, als allgemeines und abstraktes Prinzip formulieren. Man vergleiche z.B. mit Mittelstufengeometrie, wo Schüler zunächst an Beispielen entdecken, dass die Diagonalen eines Rechteckes gleich lang sind, dies dann formulieren und anschließend beweisen. Schüler können Sudokus eines gewissen Schwierigkeitsgrades lösen, ohne vorher mathematisch formulierte Regeln erlernt zu haben. So können sie die verschiedenen Techniken selber identifizieren, sie allgemein formulieren und mit ihrer Hilfe weitere Sudokus, auch mit erhöhtem Schwierigkeitsgrad, lösen. In diesem Falle steht das *Formulieren* von Beobachtungen als allgemeine Regeln im Vordergrund. Die Beweise dieser Regeln sind oftmals bei richtiger Formulierung der Regel offensichtlich, z.B. wenn die Regel mehr oder weniger besagt, dass acht von neun Möglichkeiten ausgeschlossen sind. Detaillierte, aber sehr technische Formulierungen stellen wir als Ergänzung in einer längeren Version dieser Veröffentlichung mit erweitertem Anhang auf der Internetseite des ersten Autors zur Verfügung [14]. Je nach mathematischer Reife der Schüler kann das Thema mehr oder weniger abstrakt behandelt werden.

Die in Sudokubüchern angegebenen kompletten Lösungen sind für den in diesem Aufsatz diskutierten didaktischen Einsatz im Mathematikunterricht nicht geeignet, wenn keine schrittweise Begründung gegeben wird, wie man auf die Lösung kommen kann. Ein Sudokulöser, der an einer Stelle stecken bleibt, wird möglicherweise selbst mit einer Lösung nicht wissen, wie er diese finden kann. Außerdem könnte es sich auch um ein schlecht gestelltes Sudoku mit mehreren Lösungen handeln. Sudoku handelt vom schrittweisen logischen Schließen, und nicht vom Raten. Systematische Durchsuchung aller Fälle kann aber natürlich weiterhelfen.

Wenn die Schüler jeden Lösungsschritt schriftlich begründen müssen, werden sie sehr schnell einsehen, dass eine allgemeine Begründung mit einer abstrakten Regel viel effizienter ist, als jedes mal neu die Situation im Spezialfall zu erklären. Die Schüler können die Strategien, die sie beim Lösen eines Sudokus entdecken, zuerst in ähnlicher Weise in Worte fassen, darauf aufbauend die verschiedenen Techniken formulieren, und dann Lösungswege zu weiteren Sudokus finden.

Dieser Aufsatz ist wie folgt aufgebaut: Zunächst führen wir die Notation ein und erläutern dann Lösungstechniken. Im Unterschied zu zahlreichen Rätselanleitungen, die eine Reihe von Techniken und Tricks erläutern, gehen wir systematisch vor und studieren von zwei Grundprinzipien ausgehend alle Unterfälle. Dann zeigen wir an Beispielen, dass damit auch recht schwere Sudokus gelöst werden können. Weiterhin stellen wir Hintergrundinformation zur Verfügung und geben Hinweise zu weiterführenden Informationsquellen. In den letzten beiden Abschnitten diskutieren wir eine neue Sudokuvariante mit hoher Symmetrie und eine Möglichkeit, für ein vorgegebenes Sudokugitter eine untere Schranke für die Anzahl der notwendigen Hinweise anzugeben. Einige weitere Informationen findet man in Anhängen der online verfügbaren erweiterten Version dieser Veröffentlichung [14].

2 Nomenklatur

Ein großer Teil der umfangreichen Sudokuliteratur gibt nur das Rätsel und die Lösung in Form des vollständigen Gitters an, so dass keine Notation notwendig ist. So hat sich zur Zeit noch keine einheitliche Terminologie für die verschiedenen Elemente eines Sudokugitters durchgesetzt. Besonders in der englischsprachigen Literatur werden eine ganze Anzahl verschiedener Begriffe verwendet, um das gleiche zu bezeichnen. Teilweise wird aber auch derselbe Begriff auf verschiedene Elemente angewandt. Wir verwenden sprachlich naheliegende Bezeichnungen, wie sie auch in einem weit verbreiteten Buch benutzt werden [15], und führen Alternativformen und englischsprachige Begriffe der Vollständigkeit halber im Anhang A.1 auf (Abb. 3):

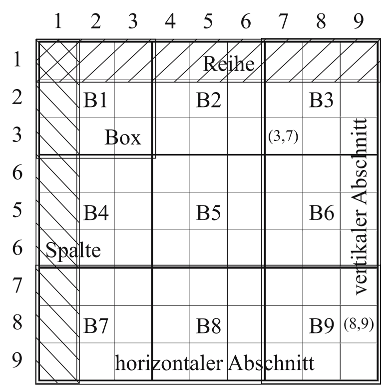

Abb. 3 Nomenklatur und Beispielzellen für Kennzeichnung der Zellen mit Matrizenschreibweise

- *Zelle*: Eine der 81 kleinsten Untereinheiten des Sudokugitters
- *Reihe*: Neun nebeneinander liegende Zellen. Jedes Sudokugitter hat neun Reihen, nummeriert von der oberen Reihe ausgehend von 1 bis 9.
- *Spalte*: Neun untereinander liegende Zellen. Jedes Sudokugitter hat neun Spalten, nummeriert von der linken Spalte ausgehend von 1 bis 9.

- *Box*: Block aus neun Zellen, die in jeweils drei untereinander liegenden Reihen und jeweils drei nebeneinander liegenden Spalten liegen. Des Weiteren ist jede Box entweder mit den Spalten 1–3, 4–6 oder 7–9, sowie den Reihen 1–3, 4–6 oder 7–9 assoziiert. Die Boxen sind von links nach rechts und von oben nach unten nummeriert („B1“–„B9“).
- *Abschnitt*: Drei nebeneinander oder drei untereinander liegende Boxen („horizontaler“/„vertikaler“ Abschnitt).
- *Hinweise*: Die in der Anfangsstellung vorgegebenen Ziffern.

Analog zur Matrizenschreibweise werden die 81 Zellen durch ihre jeweilige Reihe und Spalte gekennzeichnet. So bezeichnet z.B. (3,7) in der dritten Reihe die siebte Zelle von links und (8,9) die Zelle am rechten Rand in der achten Reihe. Mit dieser Nomenklatur sind alle Zellen eindeutig festgelegt. Die Berechnungen (i) des Index der Box, der eine Zelle, (ii) der Indizes der drei Boxen, der eine Reihe oder Spalte, und (iii) der Indizes der drei Reihen und Spalten, die einer Box angehören, sind in Anhang A.2 aufgeführt.

Alternativ zur Nummerierung der Reihen und Spalten mit Zahlen könnten auch die Reihen von `A` bis `I` und die Spalten von `a` bis `i` gezählt, siehe z.B. [16], sowie Mischformen beider Ansätze verwendet werden (vgl. Schach). Weitere Möglichkeiten wären dadurch gegeben, die Nomenklatur auf Boxen aufzubauen, und sich jeweils auf die `i`-te Zelle in Box `Bj` zu beziehen. Wir kommen in Abschnitt 6 darauf zurück.

3 Lösungstechniken

3.1 Allgemeines

Zu Beginn von Sudokurätselbüchern und -zeitschriften werden oft zahlreiche „Tipps“ und „Lösungsstrategien“ gegeben. Anzahl und Komplexität, und oft auch die Bezeichnungen, sind dabei stark von der jeweiligen Literatur abhängig. Wir bemühen uns, nicht zahllose individuelle Tricks anzugeben. Stattdessen beschränken wir uns auf zwei wichtige Grundprinzipien (allgemeine Lösungstechniken), die wir systematisch darstellen: „*Elimination*“ (`E`) und „*Vervollständigung*“ (`V`).

- „*Elimination*“ heißt, für eine feste Ziffer `x` in einer Reihe, Spalte oder Box, acht der neun möglichen Zellen auszuschließen.
- „*Vervollständigung*“ hingegen heißt, für eine feste Zelle in einer Reihe, Spalte oder Box, acht der neun möglichen Ziffereinträge auszuschließen.

Unserer Erfahrung nach ist Elimination am Anfang die am häufigsten zu verwendende Methode. Die Technik der Vervollständigung wird bei sich füllendem Sudokugitter wichtiger.[4] Es kann bei einem Sudoku auch vorkommen, dass man keine der beiden Techniken in Reinform anwenden und z.B. zunächst nur sechs oder sieben der neun Möglichkeiten ausschließen kann. In der allgemeinen Sudokuliteratur wird in diesen Situationen oft vorgeschlagen, die verbleibenden Möglichkeiten mit einem Bleistift in eine Ecke der betroffenen Zellen einzutragen (engl.

[4] Siehe auch die Reihenfolge der verwendeten Techniken im Beispielsudoku, Abschnitte 4.1 bis 4.3.

„pencil marking"). Wir verwenden solche „partielle" Techniken in den Schritten 15, 16, 17 und 27 des zweiten Lösungswegs für das Beispiel-Sudoku (Abschnitt 4.3).

Die beiden Techniken können auch mit größerer Schritttiefe als eins eingesetzt werden. Das bedeutet, dass die Platzierung einer Ziffer `x` in eine Zelle `(i,j)` die Platzierung dieser Ziffer in einer anderen Reihe, Spalte, oder Box ausschließen würde. Wir verwenden so eine Technik in Schritt 16 des zweiten Lösungswegs für das Beispiel-Sudoku (Abschnitt 4.3). Mit zunehmendem Schwierigkeitsgrad eines Sudokus wird man derartige Techniken vermehrt einsetzen müssen. Während diese partiellen Lösungsschritte und iterativen Lösungen durch die zunehmende Komplexität für einen menschlichen Sudokulöser schwer zu finden sein können, ist ihre Implementierung in Computern relativ einfach („Backtracking"), siehe [17].

Je nachdem, ob die Elimination oder Vervollständigung jeweils von einer Reihe, Spalte oder Box ausgeht, können die `E`- und `V`-Techniken in weitere Untergruppen unterteilt werden. Diese werden in den folgenden Abschnitten 3.2 und 3.3 diskutiert. Im Unterricht können die Schüler zunächst hingeführt werden, „nur" die beiden Techniken `E` und `V` zu formulieren, und dann auch die jeweiligen Untervarianten zu identifizieren.

3.2 Elimination – mehr Details

3.2.1 Boxbasierte Elimination

Man beobachtet leicht:

- Ist eine Ziffer `x` bereits in zwei von drei Boxen eines Abschnittes vorhanden, so ist die Lage von `x` in der dritten Box dadurch bis auf drei Zellen festgelegt. Kann man zwei der drei verbleibenden Möglichkeiten ausschließen, so hat man den Platz von `x` eindeutig gefunden. Wir nennen dieses Verfahren „*boxbasierte Parallelelimination*" (`EBP`) (Abb. 4). Es kann sowohl horizontal (auf Reihen) als auch vertikal (auf Spalten) angewandt werden.
- Da jede Box `Bk` in genau zwei Abschnitten liegt (einem horizontalen und einem vertikalen), kann dieses Verfahren oft gleichzeitig auf beide angewandt werden:
  Wenn die Lage der Ziffer `x` sowohl in mindestens einer der zwei anderen Boxen des horizontalen, als auch in mindestens einer der zwei anderen Boxen des vertikalen Abschnittes feststeht, so ist die Platzierung von `x` in der Box `Bk` bereits bis auf maximal vier Zellen festgelegt. Kann man drei dieser vier verbleibenden Möglichkeiten ausschließen, so hat man den Platz von `x` eindeutig gefunden. Wir nennen dieses Verfahren „*boxbasierte Kreuzelimination*" (`EBK`) (Abb. 5).

In diesem Sinne kann `EBK` auch als Unterfall der `EBP` verstanden werden. Jeder Lehrer möge für sich selber entscheiden, ob diese Untergruppierungen der Elimination (oder Vervollständigung im Abschnitt 3.3) und der entsprechenden Notation den Schülern des Kurses bei der Formulierung eines „Beweises"[5] einer Lösung eher hilft, oder die Schüler eher verwirrt.

[5] Angabe der Schrittfolge der Lösung eines Sudokus mit Begründung jedes einzelnen Schrittes.

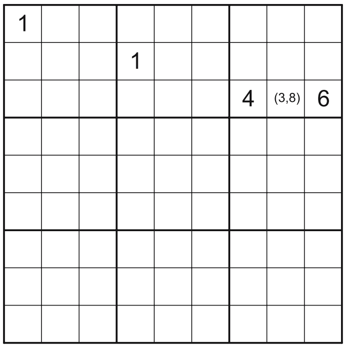

Abb. 4 Beispiel zur boxbasierten Parallelelimination (EBP) (horizontal) – der Eintrag in Zelle (3,8) muss eine 1 sein

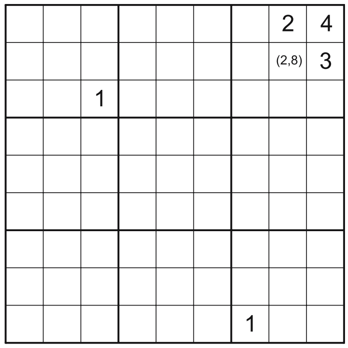

Abb. 5 Beispiel zur boxbasierten Kreuzelimination (EBK) – der Eintrag in Zelle (2,8) muss eine 1 sein

Aufgrund von bereits besetzten Feldern können weitere boxbasierte Eliminationsmöglichkeiten unterschieden werden. Wir zählen die verschiedenen Eliminationsmöglichkeiten mit Hilfe von Eliminationsgeraden (EG) systematisch auf. Immer wenn mindestens zwei sich kreuzende EG vorhanden sind, ordnen wir die Technik dem Unterfall der EBK zu:

1. Eine EG und fünf weitere besetzte Felder (EBP) (Abb. 6).
2. Zwei parallele EG und zwei weitere besetzte Felder (EBP) (Abb. 4).
3. Zwei sich kreuzenden Geraden und drei weitere besetzte Felder (EBK) (Abb. 5).
4. Zwei parallele Eliminationsgeraden, eine dazu senkrechte EG und ein weiteres besetztes Feld (EBK) (Abb. 7).
5. Zwei parallele EG und zwei weitere, zu den ersten beiden senkrechten, EG (EBK) (Abb. 8).

Den Fall von keiner EG und acht besetzten Feldern ordnen wir der Technik der Vervollständigung zu (Abschnitt 3.3).

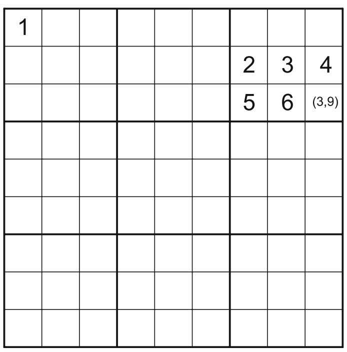

Abb. 6 Beispiel zur boxbasierten Parallelelimination (EBP) durch eine EG und fünf weitere besetzte Felder – der Eintrag in Zelle (3,9) muss eine 1 sein

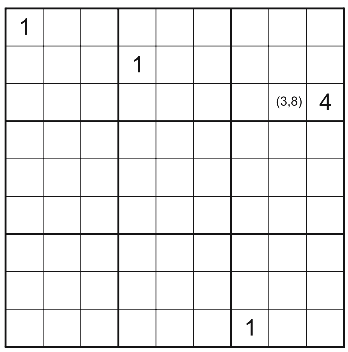

Abb. 7 Beispiel zur boxbasierten Kreuzelimination (EBK) durch zwei parallele EG, eine dazu senkrechte EG und ein weiteres besetztes Feld – der Eintrag in Zelle (3,8) muss eine 1 sein

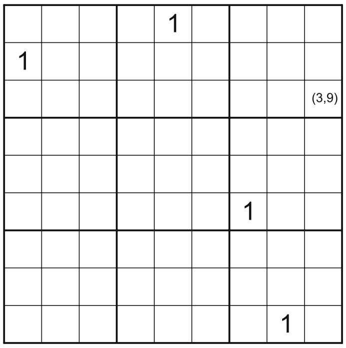

Abb. 8 Beispiel zur boxbasierten Kreuzelimination (EBK) durch zwei parallele und zwei weitere, zu den ersten beiden senkrechten, EG – der Eintrag in Zelle (3,9) muss eine 1 sein

Diese Anzahlen der EG und zusätzlich besetzten Felder können mit einer Formel ausgedrückt werden: Es sei h die Anzahl der horizontalen und v jene der vertikalen Eliminationsgeraden (also $0 \leq h \leq 2$ und $0 \leq v \leq 2$) und es sei w die Anzahl der weiteren besetzten Zellen: Ist $w + 3(h+v) - hv = 8$, so verbleibt nur noch eine Möglichkeit, die Ziffer x zu platzieren.

Im Anhang der online erhältlichen erweiterten Version dieser Veröffentlichung [14] stellen wir derartige Formeln in Form von mathematisch ausformulierten Sätzen noch einmal zusammen und verweisen auf Alternativen zur Definition der EBK als Unterfall der EBP. Da diese Formulierungen aber sehr technisch sind, sind sie für den Unterricht weniger gut geeignet.

3.2.2 Reihen- und spaltenbasierte Elimination

Wir diskutieren reihen- und spaltenbasierte Elimination in einem Abschnitt, da die Rolle von Reihen und Spalten durch Drehung vertauscht werden kann. Bei den reihenbasierten (spaltenbasierten) Eliminationstechniken werden alle Spalten (Reihen) und jene Boxen des Abschnitts, in dem sich die betrachtete Reihe (Spalte) befindet, verwendet. Analog zu den boxbasierten Eliminationstechniken, bei denen die Reihen und Spalten der betrachteten Box verwendet werden, unterscheiden wir folgende Verfahren:

- *Reihenbasierte (Spaltenbasierte) Kreuzelimination* (ERK (ESK)): Ist eine Ziffer x bereits in i Spalten (Reihen) vorhanden, so ist die Lage von x in jeder Reihe (Spalte) auf $9 - i$ Zellen festgelegt. Kann man für eine Reihe (Spalte) $8 - i$ der $9 - i$ verbleibenden Möglichkeiten ausschließen, so hat man den Platz von x eindeutig gefunden (Abb. 9 und 10).
- *Reihenbasierte (Spaltenbasierte) Parallelelimination* (ERP (ESP): Ist eine Ziffer x bereits in k Boxen eines horizontalen (vertikalen) Abschnitts vorhanden, so ist die Lage von x in jeder Reihe (Spalte), die diesem Abschnitt angehört, auf $9 - 3k$ Zellen festgelegt. Kann man für eine Reihe (Spalte) $8 - 3k$ der $9 - 3k$ verbleibenden Möglichkeiten ausschließen, so hat man den Platz von x eindeutig gefunden (Abb. 11).
- *Reihenbasierte (Spaltenbasierte) gemischte Elimination* (ERG (ESG)): Mischform aus ERK (ESK) und ERP (ESP) (Abb. 12).

	1	(2,3)	2	3		4	5	6
7								
					7			

Abb. 9 Beispiel zur reihenbasierten Kreuzelimination (ERK) – der Eintrag in Zelle (2,3) muss eine 7 sein

				7				
	1							
	(3,2)							
	2							
	3							
								7
	4							
	5							
	6							

Abb. 10 Beispiel zur spaltenbasierten Kreuzelimination (ERK) – der Eintrag in Zelle (3,2) muss eine 7 sein

1	2	3	4	5	(1,6)			
							7	

Abb. 11 Beispiel zur reihenbasierten Parallelelimination (ERP) – der Eintrag in Zelle (1,6) muss eine 7 sein

1	2	3	4		(1,6)			
							7	
				7				

Abb. 12 Beispiel zur reihenbasierten gemischten Elimination (ERG) – der Eintrag in Zelle (1,6) muss eine 7 sein

Wie zuvor bei der boxbasierten Elimination, so können auch hier aufgrund von bereits besetzten Feldern weitere Unterfälle unterschieden werden. Pro Technik – Kreuz-, Parallel- und gemischter Elimination – gibt es davon sieben, die wir exemplarisch für die `ERK` aufzählen, dabei jedoch auf weitere Abbildungen verzichten. Mit der in Reihe `i` zu platzierenden Ziffer `x` sind dies:

1. Sieben Spalten `j1` bis `j7`, die `x` enthalten, und eine besetzte Zelle in Reihe `i`, die nicht den Spalten `j1` bis `j7` angehört.
2. Sechs Spalten `j1` bis `j6`, die `x` enthalten, und zwei besetzte Zellen in `i`, die nicht den Spalten `j1` bis `j6` angehören.

usw.

7. Eine Spalte `j`, die `x` enthält, und sieben besetzte Zellen in Reihe `i`, die nicht Spalte `j` angehören.

Den Fall von keiner Spalte, die `x` enthält, und acht besetzten Feldern ordnen wir der Technik der Vervollständigung zu (Abschnitt 3.3).

3.3 Vervollständigung – mehr Details

Wir kommen nun zur zweiten Haupttechnik, fassen uns hier aber deutlich kürzer:

Man beobachtet leicht:

– In einer Reihe, Spalte oder Box mit acht bekannten Einträgen ist auch der neunte eindeutig festgelegt. Diese Technik nennen wir „*Vervollständigung durch Reihe*“ (`VR`), „*Spalte*“ (`VS`) oder „*Box*“ (`VB`) (z.B. `VR`: Abb. 13).

Verallgemeinert, resultiert der folgende Satz:

Satz: *Betrachten wir die Zelle (*`i,j`*) in Box B*`k`*: Wir bilden die Vereinigungsmenge V der bereits bekannten Ziffern in Reihe* `i`*, Spalte* `j` *und Box B*`k`*. Ist $|V| = 8$, dann ist der Eintrag in (*`i,j`*) eindeutig bestimmt.*

Diese Technik bezeichnen wir mit *Vervollständigung durch Reihe, Spalte und Box* (`VRSB`) (Abb. 14).

Zusätzlich zur Mischform `VRSB`, die aus allen drei der oben genannten drei Reinformen `VR`, `VS` und `VB` gebildet wird, gibt es Mischformen, die jeweils zwei der drei Reinformen vereinen. Wir bezeichnen diese jeweils mit `VRS` (Abb. 15),

1	2	3	4	5	6	7	8	(1,9)

Abb. 13 Beispiel zur Vervollständigung der Reihe (`VR`) – der Eintrag in Zelle (1,9) muss eine 9 sein

1	3							
2	5	(3,3)	4					7
		9						
		8						

Abb. 14 Beispiel zur Vervollständigung durch Reihe, Spalte und Box (`VRSB`) – der Eintrag in Zelle (3,3) muss eine 6 sein

		1						
		3						
2	5	(3,3)	4					7
		9						
		8						

Abb. 15 Beispiel zur Vervollständigung durch Reihe und Spalte (`VRS`) – der Eintrag in Zelle (3,3) muss eine 6 sein

1	3							
8	9							
2	5	(3,3)	4					7

Abb. 16 Beispiel zur Vervollständigung durch Reihe und Box (`VRB`) – der Eintrag in Zelle (3,3) muss eine 6 sein

`VRB` (Abb. 16) und `VSB`. Für die jeweiligen Sätze zu diesen Formen verweisen wir wieder auf den Anhang der längeren Version dieser Veröffentlichung [14].

4 Beispiel-Sudoku

4.1 Einführung

Dass die genannten Regeln ausreichen, um viele, auch schwere, Sudokus zu lösen, demonstrieren wir anhand eines schwierigen Sudokus. Das folgende Sudoku wurde von der Times am 23. Juli 2005 veröffentlicht, hat die Nummer 245 und die höchste Schwierigkeitsklassifikation „Fiendish". Abbildung 17 zeigt dieses Rätsel.

				3		7		9
	4				8			
2		7						
	3			9	5		8	
6								2
	1		2	8			3	
						5		8
			1				9	
4		3		2				

Abb. 17 24 Hinweise des Beispiel-Sudokus, siehe [18]

Zu diesem Sudoku gibt es sicher viele verschiedene Lösungswege, von denen wir nur zwei angeben, wobei die Techniken beim zweiten auch partiell und mit Schritttiefe größer eins verwendet werden. Die Lösungswege werden schrittweise aufgearbeitet. Dafür werden nacheinander zu jedem Schritt nicht nur die Zelle und die Ziffer, sondern auch die verwendete Technik angegeben.

Wie bereits eingangs erklärt (Abschnitt 1), sind wir der Ansicht, dass schrittweise Begründungen, wie man auf eine Lösung eines Sudokus kommen kann, wesentlich sind, wenn diese für den didaktischen Einsatz im Mathematikunterricht geeignet sein soll. Durch die Notwendigkeit, jeden Lösungsschritt schriftlich zu begründen, werden die Schüler schnell begreifen, dass es viel effizienter ist, die Begründungen anhand von abstrakten Regeln zu geben, als sie jedes mal neu im Spezialfall zu erklären.

Wir empfehlen dem Leser, dieses Beispiel-Sudoku zunächst selber auszuprobieren, denn wenn man die Lösung erst einmal kennt, kann man den Schwierigkeitsgrad weniger gut nachvollziehen.

4.2 Erster Lösungsweg

Dieser Lösungsweg verwendet sowohl Eliminations- als auch Vervollständigungstechniken, wie sie in Abschnitt 3 definiert wurden. Es werden weder partielle Techniken noch Schritttiefen größer eins angewandt.

Zu Beginn des Lösungswegs werden ausschließlich die boxbasierten Eliminationstechniken `EBK` und `EBP` verwendet. In der Praxis sind dies oft die Schritte, die dem Sudokulöser als erstes ins Auge fallen. Die ersten fünf Schritte sind unabhänging voneinander, weshalb ihre Reihenfolge beliebig gewählt werden kann.

Schritt	Zelle	Ziffer	Technik	Schritt	Zelle	Ziffer	Technik
1	(1,6)	2	`EBK`	2	(4,3)	2	`EBK`
3	(3,7)	8	`EBK`	4	(9,4)	8	`EBK`
5	(2,1)	3	`EBK`				

Schritte 6–12 bauen auf den Schritten 2, 4 und 5, sowie aufeinander auf. Aus den vorhergehenden Schritten $i - j$, $j \geq 1$, die benötigt werden, um Schritt i durchführen zu können, wird in der Kommentarzeile von Schritt i jeweils derjenige mit der höchsten Schrittnummer angegeben. Ein vergrößerter Zeilenabstand bedeutet, dass der nächste Schritt, i, nicht auf dem vorherigen, $i - 1$, sondern auf weiter zurückliegenden, $i - j$, $j \geq 2$, aufbaut.

Schritt	Zelle	Ziffer	Technik	Kommentar
6	(3,9)	3	`EBK`	benötigt 5
7	(8,7)	3	`EBK`	benötigt 6
8	(8,5)	5	`EBK`	benötigt 4
9	(9,2)	5	`EBP`	benötigt 8
10	(7,8)	2	`EBK`	benötigt 7
11	(2,7)	2	`EBP`	benötigt 10
12	(8,2)	2	`EBK`	benötigt 2, 10

Nun sind alle 2en platziert, und die Ziffern 1 und 3 bis 9 können nicht mehr durch die auf Boxen aufbauenden Eliminationstechniken `EBK`/`EBP` vervollständigt werden (Abb. 18).

				3	2^{1}_{EBK}	7		9
3^{5}_{EBK}	4				8	2^{11}_{EBP}		
2		7				8^{3}_{EBK}		3^{6}_{EBK}
	3	2^{2}_{EBK}		9	5		8	
6								2
	1		2	8			3	
						5	2^{10}_{EBK}	8
	2^{12}_{EBK}		1	5^{8}_{EBK}		3^{7}_{EBK}	9	
4	5^{9}_{EBP}	3	8^{4}_{EBK}	2				

Abb. 18 Stellung der Ziffern im Beispiel-Sudoku nach Schritt 12. Schrittnummer und verwendete Technik sind jeweils durch Indizes angegeben

Ab dem folgenden Schritt 13 werden neben den boxbasierten Eliminationstechniken `EBK`/`EBP` auch Vervollständigungstechniken sowie reihen- und spaltenbasierte Eliminationstechniken verwendet.

Schritt	Zelle	Ziffer	Technik	Kommentar
13	(4,1)	7	`VRSB`	benötigt 2
14	(9,6)	9	`ERP`	benötigt 9
15	(8,9)	4	`EBP`	benötigt 10
16	(8,6)	7	`ERK`	benötigt 15
17	(8,3)	6	`ERK`	benötigt 16
18	(8,1)	8	`VR`	benötigt 17
19	(7,2)	7	`EBP`	benötigt 16
20	(6,9)	7	`ERK`	benötigt 16
21	(2,9)	5	`ESK`	benötigt 20
22	(3,4)	5	`ERG`	benötigt 21
23	(3,2)	9	`ERG`	benötigt 22
24	(5,2)	8	`VRB`	benötigt 23
25	(1,2)	6	`VS`	benötigt 24

Abbildungen 19 und 20 zeigen das Beispiel-Sudoku jeweils nach Schritt 19 und 25. Schrittnummer und verwendete Technik für die Schritte 13 bis 19 bzw. 20 bis 25 sind jeweils durch Indizes angegeben.

				3	2	7		9
3	4				8	2		
2		7				8		3
7^{13}_{VRSB}	3	2		9	5		8	
6								2
	1		2	8			3	
	7^{19}_{EBP}					5	2	8
8^{18}_{VR}	2	6^{17}_{ERK}	1	5	7^{16}_{ERK}	3	9	4^{15}_{EBP}
4	5	3	8	2	9^{14}_{ERP}			

Abb. 19 Stellung der Ziffern im Beispiel-Sudoku nach Schritt 19 (erster Lösungsweg)

	6^{24}_{VS}			3	2	7		9
3	4				8	2		5^{21}_{ESK}
2	9^{23}_{ERG}	7	5^{22}_{ERG}			8		3
7	3	2		9	5		8	
6	8^{24}_{VRB}							2
	1		2	8			3	7^{20}_{ERK}
	7					5	2	8
8	2	6	1	5	7	3	9	4
4	5	3	8	2	9			

Abb. 20 Stellung der Ziffern im Beispiel-Sudoku nach Schritt 25 (erster Lösungsweg)

Schritt	Zelle	Ziffer	Technik	Kommentar
26	(1,3)	8	`EBK`	benötigt 18
27	(1,1)	5	`EBP`	benötigt 26
28	(2,3)	1	`VB`	benötigt 27
29	(7,1)	1	`EBP`	benötigt 27
30	(6,1)	9	`VS`	benötigt 29
31	(7,3)	9	`VB`	benötigt 29
32	(6,3)	5	`ERK`	benötigt 27
33	(5,3)	4	`VS`, `VB`	benötigt 32
34	(1,8)	1	`ERK`	benötigt 27
35	(1,4)	4	`VR`	benötigt 34

Hier und im Folgenden bezeichne eine Aufzählung wie in Schritt 33, dass alle aufgezählten Techniken unabhängig angewendet werden können. Abbildung 21 zeigt das Beispiel-Sudoku nach Schritt 35. Schrittnummer und verwendete Technik für die Schritte 26 bis 35 sind wiederum jeweils durch Indizes angegeben.

Nach Schritt 35 bauen die einzelnen Schritte weniger eindeutig aufeinander auf als bisher, und viele verschiedene Reihenfolgen sind möglich. Daher verzichten wir im Folgenden auf die Kommentarzeile und betonen nochmals, dass der angegebene Lösungsweg nur einer von vielen möglichen ist.

Schritt	Zelle	Ziffer	Technik	Schritt	Zelle	Ziffer	Technik
36	(3,8)	4	EBP	37	(2,8)	6	VB
38	(5,8)	5	ESK	39	(9,8)	7	VS
40	(4,7)	4	ERK	41	(4,9)	1	ERK
42	(4,4)	6	VR	43	(6,6)	4	ERK
44	(6,7)	6	VR	45	(5,7)	9	VB
46	(9,7)	1	VR	47	(9,9)	6	VB, VS
48	(2,4)	9	ERK	49	(2,5)	7	VR
50	(5,4)	7	ESK, ERK, EBP	51	(7,4)	3	VS
				52	(7,5)	4	EBP, ERK
53	(7,6)	6	VB	54	(3,5)	6	EBP, ERK
55	(3,6)	1	VB	56	(5,6)	3	VS
57	(5,5)	1	VR, VS, VB				

Das vollständig gelöste Beispiel-Sudoku ist in Abb. 22 gezeigt. Schrittnummer und verwendete Technik für die Schritte 36 bis 57 sind wiederum jeweils durch Indizes angegeben.

5^{27}_{EBP}	6	8^{26}_{EBK}	4^{35}_{VB}	3	2	7	1^{34}_{ERK}	9
3	4	1^{28}_{VB}			8	2		5
2	9	7	5			8		3
7	3	2		9	5		8	
6	8	4^{33}_{*}						2
9^{30}_{EBK}	1	5^{32}_{ERK}	2	8			3	7
1^{29}_{EBP}	7	9^{31}_{VB}				5	2	8
8	2	6	1	5	7	3	9	4
4	5	3	8	2	9			

Abb. 21 Stellung der Ziffern im Beispiel-Sudoku nach Schritt 35 (erster Lösungsweg); $*$: VS,VB

5	6	8	4	3	2	7	1	9
3	4	1	9^{48}_{ERK}	7^{49}_{VR}	8	2	6^{37}_{VB}	5
2	9	7	5	6^{54}_{EBP}	1^{55}_{VB}	8	4^{36}_{EBP}	3
7	3	2	6^{42}_{VR}	9	5	4^{40}_{ERK}	8	1^{41}_{ERK}
6	8	4	7^{50}_{ESK}	1^{57}_{**}	3^{56}_{VR}	9^{45}_{VB}	5^{38}_{ESK}	2
9	1	5	2	8	4^{43}_{ERK}	6^{44}_{VR}	3	7
1	7	9	3^{51}_{VS}	4^{52}_{EBP}	6^{53}_{VB}	5	2	8
8	2	6	1	5	7	3	9	4
4	5	3	8	2	9	1^{46}_{VR}	7^{39}_{VS}	6^{47}_{*}

Abb. 22 Lösung des Beispiel-Sudokus (erster Lösungsweg); $*$: VS,VB; $**$: VR,VS,VB

4.3 Zweiter Lösungsweg

Im Gegensatz zum ersten Lösungsweg werden hier die Techniken auch partiell und mit Schritttiefe größer eins eingesetzt. Die Schritte 1–13 sind identisch mit jenen im ersten Lösungsweg. Daher setzen wir die Diskussion mit Schritt 14 fort.

Zu diesem Zeitpunkt sind alle 2en gesetzt, weitere Ziffern 1 oder 3–9 können nicht mehr durch die Eliminationstechniken `EBK`/`EBP` platziert werden, und die Vervollständingungstechnik `VRSB` wurde einmal angewandt, um die Ziffer 7 in Zelle (4,1) zu bestimmen.

Schritt	Zelle	Ziffer	Technik	Kommentar
14	(7,2)	7	`EBP`	benötigt 13
15	(4,4)	[4,6]	partielle `VRS`	benötigt 13
16	(6,6)	[4,6]	partielle $\mathtt{VRB}_2$	benötigt 13
Schritttiefe 2: 7 in (6,6) würde 7 in B8 ausschließen.				
17	(5,[4,5,6])	7	partielle `VB`	benötigt 16
18	(6,9)	7	`EBK`	benötigt 17
19	(9,8)	7	`EBP`	benötigt 18
20	(8,6)	7	`EBP`	benötigt 19

Abbildung 23 zeigt das Beispiel-Sudoku nach Schritt 20. Schrittnummer und verwendete Technik für die Schritte 14 bis 20 sind jeweils durch Indizes angegeben.

				3	2	7		9
3	4				8	2		
2		7				8		3
7	3	2	$[4,6]^{15}_{\mathrm{VRS}}$	9	5		8	
6			7^{17}_{VB}	7^{17}_{VB}	7^{17}_{VB}			2
	1		2	8	$[4,6]^{16}_{\mathrm{VRB}_2}$		3	7^{18}_{EBK}
	7^{14}_{EBP}					5	2	8
	2		1	5	7^{20}_{EBP}	3	9	
4	5	3	8	2			7^{19}_{EBP}	

Abb. 23 Stellung der Ziffern im Beispiel-Sudoku nach Schritt 20 (zweiter Lösungsweg)

Ab Schritt 15 werden auch die in Abschnitt 3 als „partiell“ bezeichneten Techniken verwendet. Der Einsatz dieser Techniken ermöglicht dann, dass in einem Folgeschritt eine Ziffer wiederum eindeutig platziert werden kann. Wir erklären die Schritte 15–18 etwas ausführlicher: Zunächst bildet man das Paar der Ziffern 4 und 6 in Box `B5`. Auch wenn man noch nicht weiß, wo genau die 4 oder 6 zu platzieren ist, bildet ein solches Paar (oder allgemeiner k Zahlen in k Zellen) einen wertvollen Hinweis. Hier folgt insbesondere, dass die 7 in Box `B5` in der Reihe 5 liegen muss. Und dies wiederum ist wichtig, um in Schritt 18 die 7 in Zelle (6,9) platzieren zu können. Wenn man Bleistiftnotizen in der Ecke verwendet, sieht man eine solche Situation leichter. Man kann die Technik in den Schritten 15–16 als „Paare bilden“ und in den Schritten 17–18 als „indirektes Schließen“ bezeichnen.

Schritt	Zelle	Ziffer	Technik	Kommentar
21	(9,6)	9	ERP	benötigt 10
22	(8,9)	4	EBP	benötigt 16
23	(8,3)	6	ERK	benötigt 22
24	(8,1)	8	EBP	benötigt 23
25	(5,8)	5	EBK	benötigt 18
26	(2,9)	5	EBP	benötigt 25
27	(1,[1,3])	5	partielle EBK	benötigt 26
28	(3,4)	5	EBK	benötigt 27
29	(2,4)	9	EBK	benötigt 28
30	(2,5)	7	EBP	benötigt 29
31	(5,4)	7	EBP	benötigt 30
32	(5,6)	3	EBP	benötigt 31
33	(5,5)	1	VB	benötigt 32
34	(7,4)	3	EBP	benötigt 22
35	(3,6)	1	EBK	benötigt 33
36	(2,3)	1	VRS	benötigt 35

Abbildung 24 zeigt das Beispiel-Sudoku nach Schritt 36 (zweiter Lösungsweg). Schrittnummer und verwendete Technik für die Schritte 21 bis 36 sind jeweils durch Indizes angegeben.

Schritt 36 ist eine Art „Schlüsselschritt“: Er eröffnet eine ganze Reihe an Möglichkeiten, das Sudoku weiter zu lösen. Daher sind ab hier viele verschiedene Reihenfolgen möglich, und die einzelnen Schritte bauen weniger eindeutig aufeinander auf als bisher. Aus diesem Grund verzichten wir wiederum auf die Kommentarspalte, und betonen nochmals, dass die aufgeführte Reihenfolge nur eine von vielen möglichen ist.

Schritt	Zelle	Ziffer	Technik	Schritt	Zelle	Ziffer	Technik
37	(1,8)	1	EBP	38	(7,1)	1	EBP
39	(3,8)	4	EBP	40	(1,4)	4	EBP
41	(6,6)	4	EBP	42	(7,5)	4	EBP
43	(3,5)	6	VB	44	(2,8)	6	VB
45	(4,4)	6	VB	46	(7,3)	9	VB
47	(7,6)	6	VB	48	(4,7)	4	VRS
49	(4,9)	1	VR	50	(9,9)	6	VS
51	(9,7)	1	VR, VB	52	(3,2)	9	VR
53	(6,7)	6	VB	54	(5,7)	9	VB
55	(6,1)	9	VS	56	(1,1)	5	VS
57	(1,2)	6	EBP	58	(1,3)	8	VR, VB
59	(5,2)	8	VS	60	(5,3)	4	VR
61	(6,3)	5	VR, VS, VB				

Die vollständige Lösung ist natürlich identisch mit jener aus Abschnitt 4.2 (Abb. 22). Sie ist in Abb. 25 noch einmal gezeigt, wobei Schrittnummern und verwendete Techniken für die Schritte 37 bis 61 des zweiten Lösungsschrittes durch Indizes angegeben sind.

5^{27}_{EBK}		5^{27}_{EBK}		3	2	7		9
3	4	1^{36}_{VRS}	9^{29}_{EBK}	7^{30}_{EBP}	8	2		5^{26}_{EBP}
2		7	5^{28}_{EBK}		1^{35}_{EBK}	8		3
7	3	2	[4;6]	9	5		8	
6			7^{31}_{EBP}	1^{33}_{VB}	3^{32}_{EBP}		5^{25}_{EBK}	2
	1		2	8	[4;6]		3	7
	7		3^{34}_{EBP}			5	2	8
8^{24}_{VR}	2	6^{23}_{ERK}	1	5	7	3	9	4^{22}_{EBP}
4	5	3	8	2	9^{21}_{ERP}		7	

Abb. 24 Stellung der Ziffern im Beispiel-Sudoku nach Schritt 36 (zweiter Lösungsweg)

5^{56}_{VS}	6^{57}_{EBP}	$8^{58}_{\dagger}$	4^{40}_{EBP}	3	2	7	1^{37}_{EBP}	9
3	4	1	9	7	8	2	6^{44}_{VB}	5
2	9^{52}_{VR}	7	5	6^{43}_{VB}	1	8	4^{38}_{EBP}	3
7	3	2	6^{45}_{VB}	9	5	4^{48}_{VRS}	8	1^{49}_{VR}
6	8^{59}_{VS}	4^{60}_{VR}	7	1	3	9^{54}_{VB}	5	2
9^{55}_{VB}	1	$5^{61}_{\dagger\dagger}$	2	8	4^{41}_{EBP}	6^{52}_{VB}	3	7
1^{38}_{EBP}	7	9^{46}_{VB}	3	4^{41}_{EBP}	6^{47}_{VB}	5	2	8
8	2	6	1	5	7	3	9	4
4	5	3	8	2	9	$1^{51}_{\dagger}$	7	6^{50}_{VS}

Abb. 25 Lösung des Beispiel-Sudokus (Indizes für Schritte 37 bis 61 des zweiten Lösungswegs); †: VR,VB; ††: VR,VS,VB

5 Verschiedenes

5.1 Lateinische Quadrate

Sudokugitter sind ein Spezialfall von lateinischen Quadraten. Ein lateinisches Quadrat der Ordnung n ist ein $n \times n$-Gitter, in dem in jeder Reihe und Spalte jede der Zahlen 1 bis n genau einmal vorkommt. Die Frage der eindeutigen Vervollständigung partiell angegebener Quadrate war ein bereits bekanntes mathematisches Problem, bevor Sudoku so populär wurde.

Bailey, Cameron und Connelly [1] weisen darauf hin, dass eine von Behrens [2] eingeführte Familie von „gerechten lateinischen Quadraten", bei denen das $n \times n$-Quadrat in n Regionen von n Zellen unterteilt wird, in denen auch jede Zahl von 1 bis n genau einmal vorkommt. Sudokus sind also eine spezielle Form hiervon, wo diese Regionen die neuen 3×3-Boxen sind.

Lateinische Quadrate und ihre Erweiterungen wie orthogonale lateinische Quadrate, Eulers Offiziersproblem usw. sind ein eigenes interessantes Thema. Dies führt aber zu weit weg vom Thema dieses Aufsatzes. Die Anzahl lateinischer Quadrate ist sehr viel größer als jene der Sudokugitter, da die Restriktion, dass jede Box auch alle neun Ziffern genau einmal enthält, wegfällt. Die Anzahl der lateinischen Quadrate der Ordnung 9 ist 5.524.751.496.156.892.842.531.225.600. Davon sind 377.597.570.964.258.816 wesentlich verschieden, siehe [19, 20].

5.2 Anzahl der Sudokugitter

Felgenhauer und Jarvis [21] haben die Anzahl der verschiedenen Sudokugitter gezählt. Nach einigen Symmetrieüberlegungen und Computerrechnungen kommen sie auf 6.670.903.752.021.072.936.960 Gitter. Jarvis und Russell [22] berechneten, dass davon 5.472.730.538 „wesentlich verschieden" sind. Für diese Rechnung betrachten Jarvis und Russell zwei Gitter als nicht wesentlich verschieden, wenn sie durch eine oder mehrere der folgenden Symmetrieoperationen ineinander überführt werden können:

1. Permutation der neun Ziffern.
2. Permutation der drei vertikalen Abschnitte.
3. Permutation der drei horizontalen Abschnitte.
4. Permutation der drei Spalten innerhalb eines vertikalen Abschnittes.
5. Permutation der drei Reihen innerhalb eines horizontalen Abschnittes.
6. Drehung um 90°, 180° oder 270°.
7. Spiegelung an den vier Symmetrieachsen eines Quadrates.

Dabei ist also z.B. auch Vertauschen der Rolle von Spalten und Reihen enthalten.

Für den Lehrer ergibt sich übrigens durch derartige Symmetrien die Möglichkeit, von einem Sudokurätsel ausgehend, anders aussehende, aber logisch gleich schwere Aufgaben zu stellen.

Da ein festes Gitter bereits durch viele verschiedene Teilmengen der 81 Ziffern eindeutig festgelegt ist, ist die Anzahl der möglichen Sudokurätsel wesentlich höher als die Anzahl der Sudokugitter. Die genaue Zahl ist nicht bekannt.

5.3 Computerprogramme

Computer eignen sich naturgemäß für die Anwendung fester Regeln. Sie können nicht nur zuverlässig alle Eliminations- und Vervollständigungstechniken blitzschnell ausprobieren, was für den Menschen ermüdend sein kann, sondern er kann auch mühelos größere Schritttiefen verwenden. Offensichtlich kann man z.B. mit einer erschöpfenden Suche und hoher Schritttiefe jedes Sudoku lösen. Dabei sind in schwierigen Positionen vielerlei Fallunterscheidungen notwendig.

Es gibt zahlreiche Sudoku-Computerprogramme. Einige der Programme können nicht nur gegebene Sudokus lösen, sondern es auch auf Mehrfachlösungen prüfen oder neue Rätsel generieren. Lösungen mittels ganzzahliger linearer Programmierung werden von Kaibel und Koch [23] beschrieben. Sie bieten auch einen WWW-Service zum Lösen einzelner Sudokus an.

Ein kommerzielles Programm ist unter [4] zu finden. Man kann auch bereits Geld dafür ausgeben, um nur das Rätsel per SMS gesendet zu bekommen, oder neben konventionellen auf Papier gedruckten Rätseln auch „elektronische Rätselbücher“ im Taschenformat erwerben. Wir haben keines der kommerziellen Produkte getestet.

Ein frei verfügbares Programm ist z.B. das von McLoone [24], das unter Mathematica läuft. Wenn man im Internet nach „Sudoku“ und „freeware“ sucht, findet man noch weitere Programme.

5.4 Schwierigkeitsgrad

Der Schwierigkeitsgrad eines Sudokus ist nicht objektiv. Meistens schätzen die Aufgabensteller mittels Computerprogrammen die benötigte Komplexität der notwendigen Techniken ab. Auch manchmal angegebene Zeitangaben variieren stark mit der Zielgruppe der Leser.

Die Anzahl der vorgegebenen Hinweise ist kein gutes Maß für den Schwierigkeitgrad eines Sudokus. Mit wenigen Hinweisen mag es zwar nicht so leicht sein, einen Anfang zu finden, die schwierigste Stelle beim Lösen wird aber oft erst erreicht, wenn bereits mehr als die Hälfte der Ziffern eingetragen ist.

5.5 Sudoku-Variationen

Es gibt zahlreiche Variationen vom klassischen Sudoku. Exemplarisch nennen wir das kleinere Sudoku, das auf einem 6×6-Gitter beruht, wobei die Boxen dann keine Quadrate mehr sind. Es gibt Sudokus mit 16×16- oder 25×25-Gittern und dreidimensionale Varianten. Beim „Samurai Sudoku“ greifen fünf Sudokus ineinander über. Weitere Stichworte sind „Kakuro“ und „Killersudoku“. Für einen Überblick und weitere Referenzen vergleiche man die Wikipediaartikel [6, 7].

5.6 Informationen im Internet und weitere Literatur

Während die Autoren an diesem Artikel arbeiteten, sind andere ähnliche Artikel erschienen, wie [21, 23, 17].

Das Internet ist natürlich auch eine sehr gute und schnelle Informationsquelle für Informationen über Sudoku für eine Vielzahl verschiedener Zielgruppen. Eine große Anzahl weiterer Links ist in [25, 26, 27] zu finden. Für sehr fortgeschrittene Lösungstechniken verweisen wir hier besonders auf [28].

6 Positionssudoku – eine neue Sudokuvariante

In diesem Abschnitt schlagen wir eine Variante von Sudoku vor, die eine höhere Symmetrie hat, und bei der daher möglicherweise die minimale Anzahl der notwendigen Hinweise kleiner als 17 ist.

Zusätzlich zu der Regel, dass in jeder Reihe, Spalte und Box jede Ziffer genau einmal vorkommt, fordern wir, dass in jeder festen Position innerhalb der neun Boxen jede Ziffer genau einmal vorkommt; oder andersherum ausgedrückt, dass jede Ziffer in allen neun Boxen in verschiedenen Positionen ist. Dies nennen wir „Positionssudoku“. Ein Positionssudoku ist also ein lateinisches Quadrat, das simultan bezüglich der Boxen und bezüglich der Position innerhalb der Boxen gerecht ist (oder ein multiples gerechtes Design nach Bailey, Cameron und Connelly [1]).

Es ist offensichtlich, dass man beim normalen Sudoku die Rolle von Reihen und Spalten vertauschen kann. Jede Regel, die für Reihen formuliert wird, kann in eine Regel für Spalten umformuliert werden. Beim Positionssudoku kann man auch Reihen und Spalten mit den Boxen vertauschen, wie unten erläutert wird.

Gehen wir noch einmal zurück zur Frage der Notation. Eine Zelle kann eindeutig durch Reihe und Spalte beschrieben werden, so dass man sich dies auch durch ein Koordinatensysten vorstellen kann. Ein anderes Koordinatensystem ist dadurch definiert, zunächst die Box anzugeben, und dann die Lage innerhalb der Box. So liegt z.B. die Zelle (2,7) in Reihe 2 und Spalte 7 in Box B3 an Position 4. Hierbei seien die Zellen innerhalb einer Box analog zu den Boxen durchnummeriert: $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5&6\\\hline 7&8&9\\\hline\end{array}$.

Bildet man also die Abbildung f von der Reihen-und-Spalten-Schreibweise $(\mathtt{i},\mathtt{j})$ in die Boxnotation $(\mathtt{k},\mathtt{l})_{\mathrm{Box}}$, so folgt:

$$f:(\mathtt{i},\mathtt{j}) \mapsto \left(3\left\lfloor\frac{\mathtt{i}-1}{3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{\mathtt{j}-1}{3}\right\rfloor + 1,\right.$$
$$\left. 3((\mathtt{i}-1) \bmod 3) + ((\mathtt{j}-1) \bmod 3) + 1\right)_{\mathrm{Box}} .$$

Hierbei bedeutet $\lfloor a \rfloor$, dass die positive reelle Zahl a zur nächst kleineren Zahl abgerundet wird (Beispiel $\lfloor\frac{5}{3}\rfloor = 1$). Die Abbildung f ist eine Involution, d.h. dass die Umkehrabbildung dieselbe Abbildung ist. So wird z.B. (2,7) auf (3,4) und (3,4) wiederum auf (2,7) abgebildet.

Das Sudokugitter in Abb. 26 ist ein solches Positionssudokugitter. Die Abbildung f bildet es auf das in Abb. 27 gezeigte Positionssudoku ab.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	8	9	1	2	3	4	5	6
4	5	6	7	8	9	1	2	3
2	1	4	3	6	5	8	9	7
3	6	5	8	9	7	2	1	4
8	9	7	2	1	4	3	6	5
5	3	1	6	4	2	9	7	8
6	4	2	9	7	8	5	3	1
9	7	8	5	3	1	6	4	2

Abb. 26 Erstes Positionssudoku

1	2	3	7	8	9	4	5	6
4	5	6	1	2	3	7	8	9
7	8	9	4	5	6	1	2	3
2	1	4	3	6	5	8	9	7
3	6	5	8	9	7	2	1	4
8	9	7	2	1	4	3	6	5
5	3	1	6	4	2	9	7	8
6	4	2	9	7	8	5	3	1
9	7	8	5	3	1	6	4	2

Abb. 27 Zweites Positionssudoku, das man aus dem ersten Positionssudoku (Abb. 26) erhält, indem man die Abbildung f anwendet

Das in Abb. 28 gezeigte ähnlich aussehende Positionssudoku ist ein Fixpunkt der Abbildung f, da die $\mathtt{i}$-te Reihe mit der $\mathtt{i}$-ten Box übereinstimmt.

Während bei einem Positionssudoku die Reihe $\mathtt{i}$ auf die Box $\mathtt{i}$ abgebildet wird, wird die Spalte $\mathtt{j}$ auf die Position $\mathtt{j}$ innerhalb der neun Boxen abgebildet. So ist z.B. in Abb. 26 die erste Spalte $(1, 7, 4, 2, \ldots)$ auch die Folge der ersten Position in den Boxen B1, B2, B3 etc. in Abb. 27. Durch die Abbildung f ist für Positionssudokugitter also eine neue Symmetrie definiert, die nicht im Abschnitt 5.2 aufgelistet wurde. Reihenbasierte Lösungsregeln gehen also auf boxbasierte Regeln über und umgekehrt. Wenn man das eine Positionssudoku lösen kann, dann auch das andere durch entsprechende Umformulierung aller Schritte.

Wenn man der Meinung ist, dass die Gitter, die durch die Abbildung f aufeinander abgebildet werden, nicht „wesentlich verschieden“ sind, dann muss man die Anzahl der wesentlich verschiedenen Sudokugitter (Abschnitt 5.2) entsprechend verringern. Allerdings ist der Unterschied nicht groß, da die meisten Sudokugitter keine Positionssudokugitter sind.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	6	5	8	9	7
3	6	5	8	9	7	2	1	4
8	9	7	2	1	4	3	6	5
5	3	1	6	4	2	9	7	8
6	4	2	9	7	8	5	3	1
9	7	8	5	3	1	6	4	2

Abb. 28 Positionssudoku, das ein Fixpunkt der Reihen-Boxentransformation ist

Das Gitter in Abb. 28 hat noch eine andere interessante Eigenschaft: Geht man von dem leeren Gitter aus und füllt es entlang der Reihen mit der kleinsten möglichen Ziffer, also 1, 2, 3 etc., so erhält man dieses Gitter. Dieses Verfahren heißt Greedy-Algorithmus.

Diese Gitter inspirieren auch dazu, ein „Tripelsudoku“ zu definieren, bei dem jedes vorkommende Tripel (`i`,`j`,`k`) jeweils dreimal innerhalb eines Abschnittes vorkommen muss. Weiß man dann z.B., dass (1,2,3) vorkommt, so weiß man auch, dass für jedes andere Tripel der Form (1,`i`,`j`) `i` $= 2$ und `j` $= 3$ gelten muss.

7 Anzahl der minimalen Hinweise für ein gegebenes Sudokugitter

Um ein Sudokugitter eindeutig festzulegen, müssen mindestens acht der neun Ziffern als Hinweise vorkommen, da man sonst die zwei nicht vorkommenden Ziffern austauschen könnte, was der Eindeutigkeit der Lösung widerspräche. Weiterhin müssen auch Hinweise in sechs der neun Spalten (bzw. Reihen) vorhanden sein, da man andernfalls zwei Spalten ohne Hinweis eines vertikalen (bzw. zwei Reihen ohne Hinweis eines horizontalen) Abschnitts vertauschen könnte. Die genaue minimale Anzahl der notwendigen Hinweise ist allerdings nicht bekannt. Während man kein Beispiel kennt, bei dem 16 Hinweise eindeutig zur Lösung vervollständigt werden können, sind zahlreiche Beispiele mit 17 Hinweisen bekannt, siehe [29].

Die Menge aller Sudokugitter mit dem Computer durchzusuchen, übersteigt die Leistungsfähigkeit heutiger Computer, selbst wenn man sich auf die 5.472.730.538 „wesentlich verschiedenen“ Gitter beschränkt. Für jedes Sudokugitter gibt es darüber hinaus $\binom{81}{16} = 33.594.090.947.249.085$ Möglichkeiten, 16 Zellen auszuwählen.

Die analoge Frage ist auch für lateinische Quadrate weitgehend offen. Für ein lateinisches Quadrat der Ordnung n wird vermutet (siehe z.B. [30]), dass die minimale Größe einer sogenannten kritischen Menge $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ ist, wenn $n \geq 3$. Dies ist bisher für $n \leq 8$ bewiesen worden [31].

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Frage, wie man zu einem *fest vorgegebenen Sudokugitter* eine untere Schranke der minimal notwendigen Hinweise bestimmen kann. Dazu stellen wir zunächst die umgekehrte Frage nach fast voll besetzten Sudokugittern, bei denen die Lösung noch nicht eindeutig ist.

Als erstes Beispiel betrachten wir Abb. 29: Es ist klar, dass in den fehlenden Zellen (3,1), (3,3), (4,1) und (4,3) die Ziffern 2 und 7 einzutragen sind, aber dies könnte in der Form $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & & 7 \\\hline 7 & & 2 \\\hline\end{array}$ oder $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 7 & & 2 \\\hline 2 & & 7 \\\hline\end{array}$ geschehen. Um das Gitter eindeutig zu bestimmen, muss also notwendigerweise eine der vier Zellen als Hinweis vorgegeben sein. Ein Vergleich mit Abb. 17 zeigt, dass sogar zwei der Felder vorgegeben wurden.

Als allgemeine Regel kann man festhalten:

Satz: *Immer wenn in einem Sudokugitter ein* 2×2-*Untergitter der Form* $\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\\hline b & a \\\hline\end{array}$ *auftritt, wobei je zwei Ziffern in einer Box liegen, muss eine der vier Zellen ein Hinweis sein*[6].[7]

Eine ähnliche Einschränkung lässt sich auch für 3×3-Untergitter angeben (für ein Beispiel, siehe unten):

Satz: *Wenn ein Sudokugitter ein* 3×3 *Untergitter enthält, das nur mit drei verschiedenen Ziffern gefüllt ist, wobei jeweils drei der Ziffern in einer Box liegen,* $\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & c \\\hline c & a & b \\\hline b & c & a \\\hline\end{array}$*, so müssen mindestens zwei Ziffern als Hinweis vorgegeben sein. Darüber hinaus, wenn nur zwei Ziffern vorgegeben sind, müssen dies verschiedene Ziffern sein, die in verschiedenen Zeilen und Spalten liegen. Andernfalls müssen mindestens drei Ziffern vorgegeben sein.*

Beweis: Zunächst überzeugt man sich leicht, dass $\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & & \\\hline & & b \\\hline & & \\\hline\end{array}$ eindeutig zur Lösung ergänzt werden kann. Wären zwei gleiche Ziffern vorgegeben, o.B.d.A. etwa $\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & & \\\hline & a & \\\hline & & \\\hline\end{array}$, so wäre $\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & c & b \\\hline b & a & c \\\hline c & b & a \\\hline\end{array}$ eine Zweitlösung, so dass das Sudokugitter noch nicht eindeutig bestimmt ist. Wären zwei Ziffern in einer Zeile oder Spalte vorgegeben, o.B.d.A. etwa $\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & \\\hline & & \\\hline & & \\\hline\end{array}$, so wäre $\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & c \\\hline b & c & a \\\hline c & a & b \\\hline\end{array}$ eine Zweitlösung, so dass man auch hier einen dritten Hinweis zur eindeutigen Lösung bräuchte.

Nun kann man sich fragen, ob diese Sätze überhaupt von Relevanz sind. Bei dem Sudoku in Abb. 26 (erstes Positionssudoku) gibt es eine große Anzahl von 3×3-Untergittern, von denen mindestens die neun in Abb. 30 gekennzeichneten nicht überlappend sind, so dass also mindestens 18 Hinweise benötigt werden. Darüber hinaus gibt es drei weitere auf den Ziffern 7, 8, 9 beruhende 3×3-Untergitter in den drei vertikalen Abschnitten, wie etwa $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 7 & 8 & 9 \\\hline 8 & 9 & 7 \\\hline 9 & 7 & 8 \\\hline\end{array}$ im ersten vertikalen Abschnitt. Diese überlappen allerdings mit den ersten neun Untergittern. Es gibt auch einige 2×2-Untergitter: Die Paare mit den Ziffern 1 und 2 in den Reihen 1 und 4, 2 und 6, 3 und 5. Die Paare mit den Ziffern 5 und 6 in den Reihen 3 und 5, 1 und 4, 2 und 6. Bei diesem Beispiel kann man also leicht zeigen, dass sehr viele Hinweise vorkommen müssen, und kann diese teilweise lokalisieren. Allerdings ist dieses Beispiel auf Grund der hohen Symmetrien kein typischer Fall.

Betrachtet man unser Beispielsudoku in Abb. 25, so sieht man, dass (mindestens) die folgenden 14 Untergitter die Voraussetzungen des Satzes erfüllen (Abb. 31)[8]:

[6] Natürlich sind niemals alle vier Zellen in einer Box.

[7] Andersherum ist dies auch eine Lösungsstrategie: Ist keine der vier Zellen ein Hinweis, und sind drei Zellen mit a, b, b bekannt, $\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\\hline b & \\\hline\end{array}$, so kann die vierte kein a enthalten.

[8] Bei dem Sudoku in Abb. 2 gibt es sogar noch mehr derartige 2×2-Untergitter.

5	6	8	4	3	2	7	1	9
3	4	1	9	7	8	2	6	5
	9		5	6	1	8	4	3
	3		6	9	5	4	8	1
6	8	4	7	1	3	9	5	2
9	1	5	2	8	4	6	3	7
1	7	9	3	4	6	5	2	8
8	2	6	1	5	7	3	9	4
4	5	3	8	2	9	1	7	6

Abb. 29 Fast vollständig besetztes Sudokugitter, bei dem die Lösung noch nicht eindeutig ist (vergl. Abb. 25)

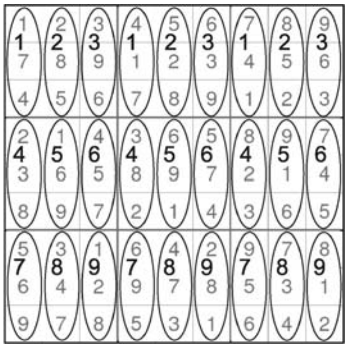

Abb. 30 Neun nicht überlappende 3 × 3-Untergitter im ersten Positionssudoku (Abb. 26)

1. (1,3), (1,7), (3,3), (3,7)
2. (1,4), (1,5), (7,4), (7,5)
3. (1,4), (1,6), (6,4), (6,6)
4. (1,7), (1,8), (9,7), (9,8)
5. (2,4), (2,6), (9,4), (9,6)
6. (3,1), (3,3), (4,1), (4,3)
7. (3,2), (3,3), (7,2), (7,3)
8. (3,7), (3,8), (4,7), (4,8)
9. (4,1), (4,4), (5,1), (5,4)
10. (5,1), (5,7), (6,1), (6,7)
11. (5,2), (5,5), (6,2), (6,5)
12. (5,4), (5,9), (6,4), (6,9)
13. (6,4), (6,5), (9,4), (9,5)
14. (8,6), (8,8), (9,6), (9,8)

Da einige der Zellen in verschiedenen 2 × 2-Untergittern vorkommen, z.B. (1,4) in 2. und 3., ist eine untere Schranke der Anzahl der Hinweise durch die Größe eines minimalen Repräsentatensystems gegeben. Vergleichen wir dies nun mit den Hinweisen im ursprünglichen Sudoku (Abb. 17):

Es kommen also 13 Hinweise unter den Zellen vor (siehe Abb. 32), die man mittels der oben erläuterten „Untergittermethode" als gute Kandidaten ermittelt hatte. Interessanterweise sind auch beide Zellen (3,3) und (6,4), die in drei verschiedenen Untergittern vorkommen, dabei. Diese 13 Hinweise sind kein minimales Repräsen-

5	6	8^{1}	4^{2}_{3}	3^{2}	2^{3}	7^{1}_{4}	1^{4}	9
3	4	1	9^{5}	7	8^{5}	2	6	5
2^{6}	9^{7}	$7^{1;6}_{7}$	5	6	1	8^{1}_{8}	4^{8}	3
7^{6}_{9}	3	2^{6}	6^{9}	9	5	4^{8}	8^{8}	1
6^{9}_{10}	8^{11}	4	7^{9}_{12}	1^{11}	3	9^{10}	5	2^{12}
9^{10}	1^{11}	5	2^{*}_{13}	8^{11}_{13}	4^{3}	6^{10}	3	7^{12}
1	7^{7}	9^{7}	3^{2}	4^{2}	6	5	2	8
8	2	6	1	5	7^{14}	3	9^{14}	4
4	5	3	8^{5}_{13}	2^{13}	9^{5}_{14}	1^{4}	7^{4}_{14}	6

Abb. 31 2 × 2-Untergitter des vollständig besetzten Sudokugitters des Beispiel-Sudokus (Abb. 25); *: $_{3,12}$

				3^{2}		7^{1}_{4}		
					8^{5}			
2^{6}		$7^{1;6}_{7}$						
							8^{8}	
6^{9}_{10}								2^{12}
	1^{11}		2^{*}_{13}	8^{11}_{13}				
							9^{14}	
				2^{13}				

Abb. 32 Die 13 Hinweise des Beispiel-Sudokus (Abb. 25), die mit der Untergittermethode korrespondieren; *: ^{3,12}

tantensystem; z.B. hat das Untergitter 12 zwei Repräsentanten, so dass man (5,9) weglassen könnte. Ebenso könnte man z.B. (3,1) und (6,2) weglassen. Auch wenn das 2×2-Untergitter 13 mehrere Repräsentanten hat, kann man nicht ohne weiteres den Hinweis (9,5) weglassen, da andernfalls im dritten vertikalen Abschnitt zwei Reihen keinen Hinweis hätten. Ebenso enthält keiner der 13 Hinweise die Ziffern 4 oder 5, so dass es auf jeden Fall einen weiteren Hinweis geben muss.

Diese Methode allein wird also sicherlich nicht zeigen können, dass es immer mindestens 17 Hinweise geben muss, aber die Verringerung der Komplexität bei der Durchsuchung der Möglichkeiten mag eines Tages bei der Entscheidung der Frage helfen.

A Anhang

A.1 Alternative Nomenklatur und englischsprachige Begriffe

- Zelle: Quadrat; engl. cell, square, box
- Reihe: Linie, Zeile; engl. row, line
- Spalte: engl. column
- Box: Quadrat; engl. box, mini-grid, nonet
- Abschnitt: Gruppe; engl. section, band (horizontal), stack (vertikal)
- Hinweis: engl. clue

A.2 Zusammenhänge zwischen Boxen-, Reihen- und Spaltenindizes

In diesem Abschnitt berechnen wir allgemein
- den Index der Box, der eine Zelle angehört, siehe (1.) unten.
- die Indizes der drei Boxen, denen eine Reihe oder Spalte (2., 3.) angehört und
- die Indizes der drei Reihen und Spalten, die einer Box angehören (4.).

1. Berechnung der Box $\mathtt{Bk}$, der die Zelle $(\mathtt{i},\mathtt{j})$ angehört:
$$\mathtt{k} = 1 + 3\left\lfloor \frac{\mathtt{i}-1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\mathtt{j}-1}{3} \right\rfloor.$$
2. Berechnung der Boxen $\mathtt{Bk1}$, $\mathtt{Bk2}$ und $\mathtt{Bk3}$, denen die Reihe $\mathtt{i}$ angehört:
$$\mathtt{k1} = 1 + 3\left\lfloor \frac{\mathtt{i}-1}{3} \right\rfloor, \quad \mathtt{k2} = 2 + 3\left\lfloor \frac{\mathtt{i}-1}{3} \right\rfloor, \quad \mathtt{k3} = 3 + 3\left\lfloor \frac{\mathtt{i}-1}{3} \right\rfloor.$$
3. Berechnung der Boxen $\mathtt{Bk1}$, $\mathtt{Bk2}$ und $\mathtt{Bk3}$, denen die Spalte $\mathtt{j}$ angehört:
$$\mathtt{k1} = 1 + \left\lfloor \frac{\mathtt{j}-1}{3} \right\rfloor, \quad \mathtt{k2} = 4 + \left\lfloor \frac{\mathtt{j}-1}{3} \right\rfloor, \quad \mathtt{k3} = 7 + \left\lfloor \frac{\mathtt{j}-1}{3} \right\rfloor.$$
4. Berechnung der Reihen $\mathtt{i1}$, $\mathtt{i2}$ und $\mathtt{i3}$ und Spalten $\mathtt{j1}$, $\mathtt{j2}$ und $\mathtt{j3}$, die der Box $\mathtt{Bk}$ angehören:
$$\mathtt{i1} = 1 + \left\lfloor \frac{\mathtt{k}-1}{3} \right\rfloor, \quad \mathtt{i2} = 2 + \left\lfloor \frac{\mathtt{k}-1}{3} \right\rfloor, \quad \mathtt{i3} = 3 + \left\lfloor \frac{\mathtt{k}-1}{3} \right\rfloor,$$
$$\mathtt{j1} = 1 + 3((\mathtt{k}-1) \bmod 3), \quad \mathtt{j2} = 2 + 3((\mathtt{k}-1) \bmod 3),$$
$$\mathtt{j3} = 3 + 3((\mathtt{k}-1) \bmod 3).$$

Literatur

1. Bailey, R.A., Cameron, P.J., Connelly, R.: Sudoku, gerechte designs, resolutions, affine space, spreads, reguli, and Hamming codes. Erscheint in American Mathematical Monthly.
2. Behrens, W.U.: Feldversuchsanordnungen mit verbessertem Ausgleich der Bodenunterschiede. Zeitschrift für Landwirtschaftliches Versuchs und Untersuchungswesen **2**, 176–193 (1956)
3. http://www.thestandard.com.hk/stdn/std/Metro/GG04Ak01.html
4. http://www.sudoku.com
5. http://www.nikoli.co.jp/en/puzzles/sudoku/hand_made_sudoku.htm
6. http://de.wikipedia.org/wiki/Sudoku
7. http://en.wikipedia.org/wiki/Sudoku
8. Malvern, J.: Les fiendish French beat us to Su Doku. The Times, 3. Juni 2006, http://www.timesonline.co.uk/article/0,,2-2208881,00.html
9. Morrison, R.: The world beater. The Times, 30. Juni 2006, http://www.timesonline.co.uk/article/0,,18209-2249074,00.html
10. The Times. 23. Juli 2005, S. 82
11. Morgenthau, L.: Erste Sudokus für Grundschulkinder. Verlag an der Ruhr, Mülheim an der Ruhr (2005)
12. Korsch, G.: Erste Sudokus für die Sekundarstufe. Verlag an der Ruhr, Mülheim an der Ruhr 2005
13. Press, D.: Sudokus für kleine Profis. Verlag an der Ruhr, Mülheim an der Ruhr 2006
14. http://www.ma.rhul.ac.uk/~elsholtz/WWW/papers/papers.html
15. Die ultimative Sudoku Herausforderung. Edition XXL, Fränkisch-Crumbach 2006
16. Wilson, R.J.: How to Solve Sudoku. The Infinite Ideas Company Limited, Oxford 2005
17. Delahaye, J.P.: Sudoku oder die einsamen Zahlen. Spektrum der Wissenschaft, **3/2006**, S. 100–106, 2006
18. The Times, 23. Juli 2005, Nr. 245, Schwierigkeitsklassifikation „Fiendish"
19. Bammel, S.E., Rothstein, J.: The number of 9×9 Latin squares. Discr. Math. **11**, 93–95 (1975)
20. http://en.wikipedia.org/wiki/Latin_squares
21. Felgenhauer, B., Jarvis, A.F.: Mathematics of Sudoku I. Mathematical Spectrum **39**, 15–22 (2006/2007)
22. Jarvis, A.F., Russell, E.: Mathematics of Sudoku II. Mathematical Spectrum **39**, 54–58 (2006/2007)
23. Kaibel, V., Koch, Th.: Mathematik für den Volkssport, DMV Mitteilungen **14/2**, 93–96 (2006)
    und Sudokuprogramm http://www.matheon.de/specialities/sudoku.asp
24. McLoone, J.: Mathematica Programm: http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/5690/
25. http://www.sudokulinks.com/sudoku.html
26. http://www.el.com/links/sudoku.asp
27. http://www.kojima-cci.or.jp/~fuji/java/sudoku-links-eng.html
28. Internet User Group mit vielen weiteren Informationen: http://www.setbb.com/phpbb/index.php?mforum=sudoku
29. http://www.csse.uwa.edu.au/~gordon/sudokumin.php
30. Bate, J.A., van Rees, G.H.J.: The size of the Smallest Strong Critical Set in a Latin Square. Ars Combinatoria **53**, 73–83 (1999)
31. Bean, R.: The size of the smallest uniquely completable set in order 8 Latin squares. J. Combin. Math. Combin. Comput. **52**, 159–168 (2005)

Die Literaturangaben mit Internetlinks beziehen sich auf die Internetseiten vom 25. Juli 2006.