Ergänzende Anhänge zum Artikel „Sudoku im Mathematikunterricht“, Math. Semesterber. (2007) 54: 69-93, DOI 10.1007/s00591-006-0014-7
Die Anhänge 3–5 sind im Original nicht veröffentlicht. Dieses Dokument ist unter dem folgenden Link zugänglich:
http://www.ma.rhul.ac.uk/~elsholtz/WWW/papers/sudokusemberichte/sudoku.html

Christian Elsholtz · Annette Mütze

Sudoku im Mathematikunterricht

Anhänge 1 – 5

Die Anhänge 3–5 sind im Original nicht veröffentlicht. Sie stellen detaillierte, aber sehr technische Formulierungen der entsprechenden Eliminations- und Vervollständigungstechniken sowie ihrer Mischformen dar. Jeder Lehrer möge selber entscheiden, ob diese Anhänge für die jeweilige Klasse geeignet sind oder nicht.

A Anhang

A.1 Alternative Nomenklatur und englischsprachige Begriffe

- Zelle: Quadrat, engl. cell, square, box
- Reihe: Linie, Zeile; engl. row, line
- Spalte: engl. column
- Box: Quadrat; engl. box, mini-grid, nonet
- Abschnitt: Gruppe; engl. section, band (horizontal), stack (vertikal)
- Hinweis: engl. clue

A.2 Zusammenhänge zwischen Boxen-, Reihen- und Spaltenindizes

In diesem Abschnitt berechnen wir allgemein

- den Index der Box, der eine Zelle angehört, siehe (1.) unten.
- die Indizes der drei Boxen, der eine Reihe oder Spalte (2., 3.) angehört und
- die Indizes der drei Reihen und Spalten, die einer Box angehören (4.).

Außerdem definieren wir die Vereinigungsmengen I, J und K, der entsprechenden Indizes (5.). Dies wird im Anhang A.3 benötigt.

Christian Elsholtz
Department of Mathematics, Royal Holloway, Egham, Surrey TW20 0EX, UK
E-Mail: christian.elsholtz@rhul.ac.uk

Annette Mütze
School of Engineering, University of Warwick, Coventry, CV4 7AL, UK
E-Mail: a.muetze@warwick.ac.uk

1. Berechnung der Box B`k`, der die Zelle (`i`,`j`) angehört:
   $\mathtt{k} = 1 + 3\lfloor \frac{\mathtt{i}-1}{3} \rfloor + \lfloor \frac{\mathtt{j}-1}{3} \rfloor$
2. Berechnung der Boxen B`k1`, B`k2` und B`k3`, denen die Reihe `i` angehört:
   $\mathtt{k1} = 1 + 3\lfloor \frac{\mathtt{i}-1}{3} \rfloor, \quad \mathtt{k2} = 2 + 3\lfloor \frac{\mathtt{i}-1}{3} \rfloor, \quad \mathtt{k3} = 3 + 3\lfloor \frac{\mathtt{i}-1}{3} \rfloor.$
3. Berechnung der Boxen B`k1`, B`k2` und B`k3`, denen die Spalte `j` angehört:
   $\mathtt{k1} = 1 + \lfloor \frac{\mathtt{j}-1}{3} \rfloor, \quad \mathtt{k2} = 4 + \lfloor \frac{\mathtt{j}-1}{3} \rfloor, \quad \mathtt{k3} = 7 + \lfloor \frac{\mathtt{j}-1}{3} \rfloor.$
4. Berechnung der Reihen `i1`, `i2` und `i3` und Spalten `j1`, `j2` und `j3`, die der Box B`k` angehören:
   $\mathtt{i1} = 1 + \lfloor \frac{\mathtt{k}-1}{3} \rfloor, \quad \mathtt{i2} = 2 + \lfloor \frac{\mathtt{k}-1}{3} \rfloor, \quad \mathtt{i3} = 3 + \lfloor \frac{\mathtt{k}-1}{3} \rfloor,$
   $\mathtt{j1} = 1+3((\mathtt{k}-1) \bmod 3)$, $\mathtt{j2} = 2+3((\mathtt{k}-1) \bmod 3)$, $\mathtt{j3} = 3+3((\mathtt{k}-1) \bmod 3)$.
5. Weitere Definitionen:
   Zur Box B`k` korrespondieren die Reihen $I := \{\mathtt{i1}, \mathtt{i2}, \mathtt{i3}\}$ eines horizontalen Abschnittes und die Spalten $J := \{\mathtt{j1}, \mathtt{j2}, \mathtt{j3}\}$ eines vertikalen Abschnittes. Umgekehrt korrespondieren zur Reihe `i` (oder Spalte `j`) die Boxen B`k` mit $\mathtt{k} \in K := \{\mathtt{k1}, \mathtt{k2}, \mathtt{k3}\}$.

A.3 Sätze zu Eliminationstechniken

Dieser Anhang ist eine Ergänzung zu Abschnitt 3.

A.3.1 Satz zu boxbasierten Eliminationstechniken

1. **Satz**: Betrachten wir die Box B`k` mit mindestens zwei unbesetzten Zellen und bilden die Vereinigungsmenge U der in B`k` bereits bekannten Ziffern. Wir betrachten eine Ziffer $\mathtt{x} \notin U$ und bilden die Vereinigungsmengen E_1 und E_2 der Indizes der Reihen $i \in I$ und Spalten $j \in J$, die die Ziffer `x` enthalten. Ferner bilden wir die Vereinigungsmenge F der besetzten Zellen (`i`,`j`) mit $i \in I \setminus E_1$ und $j \in J \setminus E_2$. Ist $|F| + 3|E_1| + 3|E_2| - |E_1||E_2| = 8$, dann ist die Platzierung von `x` in Box B`k` eindeutig bestimmt.
2. *Beweis*:
   Von den neun möglichen Platzierungen sind $3(|E_1| + |E_2|) - |E_1||E_2| + |F|$ ausgeschlossen, da jede Eliminationsgerade zunächst 3 Zellen verbietet, man allerdings die Schnittmenge sich schneidender Geraden abziehen muss (Inklusions-Exklusionsprinzip). Ist die Anzahl der ausgeschlossenen Zellen acht, so bleibt nur noch eine Möglichkeit.
3. Wir bezeichnen diese Technik als boxbasierte Parallelelimination (`EBP`).
4. Ist $|E_1||E_2| \geq 1$, so ordnen wir die Technik dem `EBP`-Unterfall der boxbasierten Kreuzelimination (`EBK`) zu.
5. Es wäre auch möglich, `EBP` und `EBK` als nebeneinanderstehende Fälle zu unterscheiden. Dann wäre $|E_1||E_2| = 0$ die Nebenbedingung für `EBP` und $|E_1||E_2| \geq 1$ die Nebenbedingung für `EBK`.
6. Nach den bisherigen Definitionen gibt es bei den boxbasierten Eliminationstechniken, anders als bei den reihenbasierten (spaltenbasierten) Eliminationstechniken, entweder einen Haupt- und einen Unterfall (siehe 3. und 4.), oder zwei nebeneinanderstehende Untergruppen (siehe 5.), aber keine dritte Mischform. Alternativ wäre es allerdings auch möglich, analog zu den reihenbasierten (spaltenbasierten) Eliminationstechniken, zwei Rein- und eine Mischform der boxbasierten Eliminationstechniken zu unterscheiden:
   – `EBP`: $|E_1||E_2| = 0$.
   – `EBK`: $|E_1||E_2| = 1$.
   – `EBG`: $|E_1||E_2| > 1$.
7. Ohne die Einschränkung „mindestens zwei unbesetzte Zellen" wäre auch der Fall $|F| = 8, |E_1| = |E_2| = 0$, möglich, den wir der Technik der Vervollständigung der Box (`VB`) zuordnen.
8. Aufgrund der gleichen Einschränkung ist $|E_1| + |E_2| \geq 1$ immer wenn die Platzierung von `x` in B`k` eindeutig bestimmt ist.
9. Ohne die Einschränkung „$\mathtt{x} \notin U$" wäre auch $|E_1| = 3$ oder $|E_2| = 3$ möglich, was die Technik überflüssig macht.

A.3.2 Satz zu reihenbasierten Eliminationstechniken

1. **Satz**: Betrachten wir die Reihe `i` und die Boxen B`k`, `k` $\in K(i)$, mit mindestens zwei unbesetzten Zellen und bilden die Vereinigungsmenge U der in der Reihe bereits bekannten Ziffern. Wir betrachten eine Ziffer `x` $\notin U$ und bilden die Vereinigungsmengen E_1 der Indizes der Spalten, die die Ziffer `x` enthalten, und E_2 der Indizes der Spalten, die denjenigen Boxen B`k` angehören, die die Ziffer `x` enthalten. Ferner bilden wir die Vereinigungsmenge F der besetzten Zellen (`i, j`) mit $j \notin (E_1 \cup E_2)$. Ist $|F| + |E_1| + |E_2| - |E_1 \cap E_2| = 8$, dann ist die Platzierung von `x` in der Reihe `i` eindeutig bestimmt.
2. *Beweis*:
   Von den neun möglichen Platzierungen sind $|E_1| + |E_2| - |E_1 \cap E_2| + |F| = 8$ ausgeschlossen. Es bleibt nur noch eine Möglichkeit.
3. `ERK`: $|E_1| + |F| = 8$, d.h. $|E_2| = 0$.
4. `ERP`: $|E_2| + |F| = 8$, d.h. $|E_1| = 0$.
5. `ERG`: $|E_1||E_2| \neq 0$.

A.3.3 Satz zu spaltenbasierten Eliminationstechniken

1. **Satz**: Betrachten wir die Spalte `j` und die Boxen B`k`, `k` $\in K(j)$ mit mindestens zwei unbesetzten Zellen und bilden die Vereinigungsmenge U der in der Reihe bereits bekannten Ziffern. Wir betrachten eine Ziffer `x` $\notin U$ und bilden die Vereinigungsmengen E_1 der Indizes der Reihen, die die Ziffer `x` enthalten, und E_2 der Indizes der Reihen, die denjenigen Boxen B`k` angehören, die die Ziffer `x` enthalten. Ferner bilden wir die Vereinigungsmenge F der besetzten Zellen (`i, j`) mit $i \notin (E_1 \cup E_2)$. Ist $|F| + |E_1| + |E_2| - |E_1 \cap E_2| = 8$, dann ist die Platzierung von `x` in der Spalte `j` eindeutig bestimmt.
2. *Beweis*:
   Von den neun möglichen Platzierungen sind $|E_1| + |E_2| - |E_1 \cap E_2| + |F| = 8$ ausgeschlossen. Es bleibt nur noch eine Möglichkeit.
3. `ESK`: $|E_1| + |F| = 8$, d.h. $|E_2| = 0$.
4. `ESP`: $|E_2| + |F| = 8$, d.h. $|E_1| = 0$.
5. `ESG`: $|E_1||E_2| \neq 0$.

A.4 Sätze zu Vervollständigungstechniken

Dieser Anhang ist eine Ergänzung zu Abschnitt 4.

A.4.1 Satz zu den Reinformen:

1. **Satz**: Betrachten wir die Zelle (`i,j`) in Box B`k`: Wir betrachten die Menge V der bereits bekannten Ziffern in Reihe `i` (Spalte `j`, Box B`k`). Ist $|V| = 8$, dann ist der Eintrag in (`i,j`) eindeutig bestimmt.
2. *Beweis*: Acht der neun möglichen Ziffern sind ausgeschlossen, so bleibt nur noch eine Möglichkeit.
3. Wir bezeichnen die Techniken als `VR`, `VS` und `VB`, abhängig davon, ob man sich auf eine Reihe, Spalte oder Box bezieht.

A.4.2 Satz zu den Mischformen zweier Reinformen

1. **Satz**: Betrachten wir die Zelle (`i,j`) in Box B`k`: Wir bilden die Vereinigungsmenge V der bereits bekannten Ziffern in Reihe `i` und Spalte `j` (Reihe `i` und Box B`k`, Spalte `j` und Box B`k`). Ist $|V| = 8$, dann ist der Eintrag in (`i,j`) eindeutig bestimmt.
2. *Beweis*: Acht der neun möglichen Ziffern sind ausgeschlossen, so bleibt nur noch eine Möglichkeit.
3. Wir bezeichnen die Techniken als `VRS`, `VRB` und `VSB`, abhängig davon, ob man sich auf eine Reihe und Spalte, Reihe und Box oder Spalte und Box bezieht.

A.4.3 Satz zu der Mischform aller drei Reinformen:

1. **Satz**: Betrachten wir die Zelle (`i`,`j`) in Box B`k`: Wir bilden die Vereinigungsmenge V der bereits bekannten Ziffern in Reihe `i`, Spalte `j` und Box B`k`. Ist $|V|$ = 8, dann ist der Eintrag in (`i`,`j`) eindeutig bestimmt.
2. *Beweis*: Acht der neun möglichen Ziffern sind ausgeschlossen, so bleibt nur noch eine Möglichkeit.
3. Wir bezeichnen diese Technik als `VRSB`.

A.5 Weitere Beispiele

Im Zuge des Lösen eines Sudokus kann es Positionen geben, bei denen sowohl eine Eliminations-, als auch eine Vervollständigungstechnik (Mischform) angewendet werden kann. In diesem Abschnitt führen wir einige solche Situationen beispielhaft auf. Es ist jeweils `x` = 7.

1. `VRS` und `ERG` (Abb. 33):
   $V_{\text{Reihe 1, Spalte 6}} = \{1,2,3,4,5,6,8,9\} \rightarrow |V| = 8$.
   Nach A.3.2 ist $E_1 = \{5,8\}$, da 7 in der fünften und achten Spalte steht. $E_2 = \{7,8,9\}$, da eine 7 in der dritten Box steht, und dadurch Spalten 7,8 und 9 betroffen sind. Die weiteren Zellen in Reihe 1 sind $F = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$
   $\rightarrow |F| + |E_1| + |E_2| - |E_1 \cap E_2| = 4+2+3-1 = 8$.
   Der Eintrag in Zelle (1,6) muss eine 7 sein.
2. `VRS` und `ERP` (Abb. 34):
   $V_{\text{Reihe 1, Spalte 6}} = \{1,2,3,4,5,6,8,9\} \rightarrow |V| = 8$.
   $E_1 = \{\}$, $E_2 = \{7,8,9\}$, $F = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5)\}$
   $\rightarrow |F| + |E_1| + |E_2| - |E_1 \cap E_2| = 5+0+3-0 = 8$.
   Der Eintrag in Zelle (1,6) muss eine 7 sein.
3. `VRS` und `ERK` (Abb. 35):
   $V_{\text{Reihe 1, Spalte 6}} = \{1,2,3,4,5,6,8,9\} \rightarrow |V| = 8$.
   $E_1 = \{5,7,8\}$, $E_2 = \{\}$, $F = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,9)\}$
   $\rightarrow |F| + |E_1| + |E_2| - |E_1 \cap E_2| = 5+3+0-0 = 8$.
   Der Eintrag in Zelle (1,6) muss eine 7 sein.
4. `VRB` und `ERG` (Abb. 36):
   $V_{\text{Reihe 1, Box B2}} = \{1,2,3,4,5,6,8,9\} \rightarrow |V| = 8$.
   $E_1 = \{5,8\}$, $E_2 = \{7,8,9\}$, $F = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$
   $\rightarrow |F| + |E_1| + |E_2| - |E_1 \cap E_2| = 4+2+3-1 = 8$.
   Der Eintrag in Zelle (1,6) muss eine 7 sein.
5. `VRB` und `ERP` (Abb. 37):
   $V_{\text{Reihe 1, Box B2}} = \{1,2,3,4,5,6,8,9\} \rightarrow |V| = 8$.
   $E_1 = \{\}$, $E_2 = \{7,8,9\}$, $F = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5)\}$
   $\rightarrow |F| + |E_1| + |E_2| - |E_1 \cap E_2| = 5+0+3-0 = 8$.
   Der Eintrag in Zelle (1,6) muss eine 7 sein.
6. `VRB` und `ERK` (Abb. 38):
   $V_{\text{Reihe 1, Box B2}} = \{1,2,3,4,5,6,8,9\} \rightarrow |V| = 8$.
   $E_1 = \{5,7,8\}$, $E_2 = \{\}$, $F = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,9)\}$
   $\rightarrow |F| + |E_1| + |E_2| - |E_1 \cap E_2| = 5+3+0-0 = 8$.
   Der Eintrag in Zelle (1,6) muss eine 7 sein.

1	2	3	4		(1,6)			
							7	
				7				
					5			
					6			
					8			
					9			

Abb. 33 `VRS` und `ERG`.

1	2	3	4	5	(1,6)			
							7	
					6			
					8			
					9			

Abb. 34 `VRS` und `ERP`.

1	2	3	4		(1,6)			9
				7				
					5	7		
					6			
					8			
					9		7	

Abb. 35 `VRS` und `ERK`.

1	2	3	4		(1,6)			
			5				7	
			6	8	9			
				7				

Abb. 36 `VRB` und `ERG`.

1	2	3	4	5	(1,6)			
			6	8	9		7	

Abb. 37 `VRB` und `ERP`.

1	2	3	4		(1,6)			9
			5					
			6	8				
				7				
						7		
							7	

Abb. 38 `VRB` und `ERK`.