

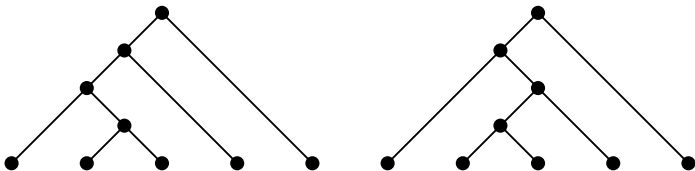
Line bijective entre les intervalles nouveaux de Chapoton et les cartes planaires biparties

Wenjie Fang, LIGM, Université Gustave Eiffel

04 janvier 2021, Université de Bordeaux

Arbres binaires

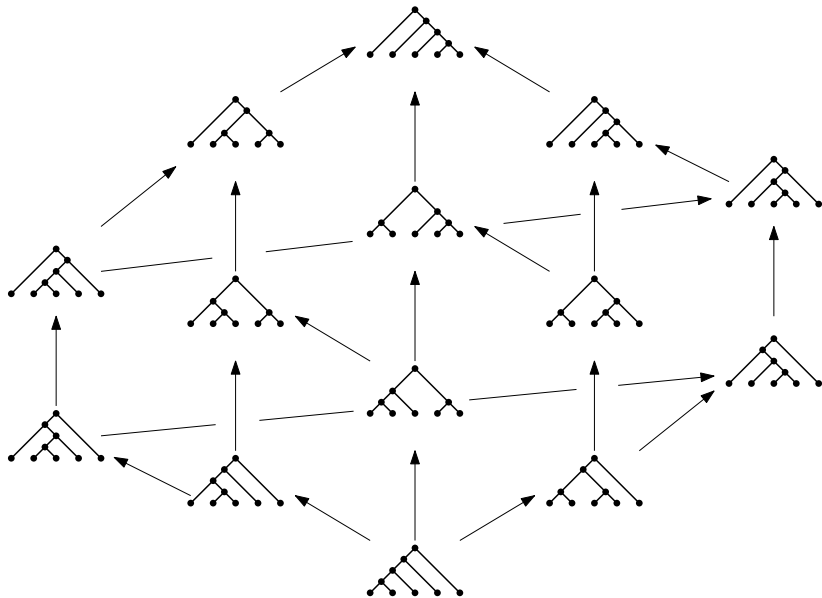
Arbre binaire : soit noeud interne avec deux enfants, soit feuille



Taille : nombre de noeuds internes.

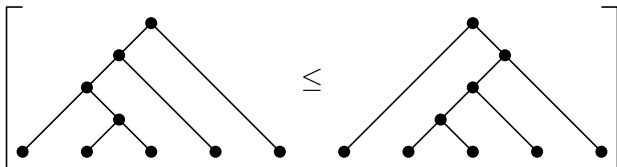
Énumération : nombre de Catalan $\text{Cat}_n = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n}$

Treillis de Tamari



Intervalle de Tamari

Intervalle de Tamari : un couple d'objets $S \leq T$ comparable dans le treillis de Tamari, aussi noté $[S, T]$



Comptés par Chapoton en 2006 : pour taille n , il y en a

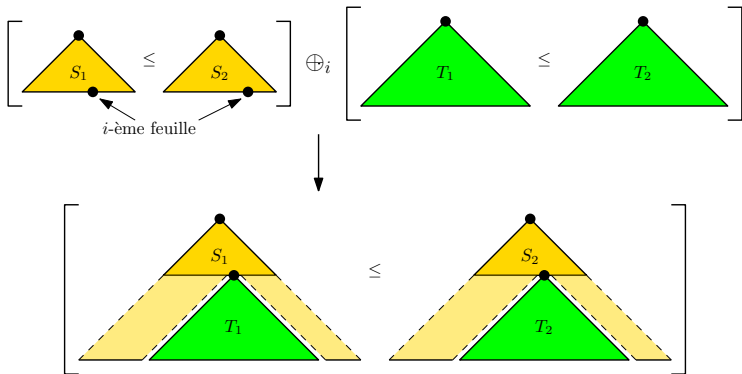
$$\frac{2}{n(n+1)} \binom{4n+1}{n-1}.$$

Même formule que les **cartes planaire sans pont** et les **triangulations planaire 3-connexes**. (Il y a des bijections.)

Comment c'est fait (par Chapoton) ?

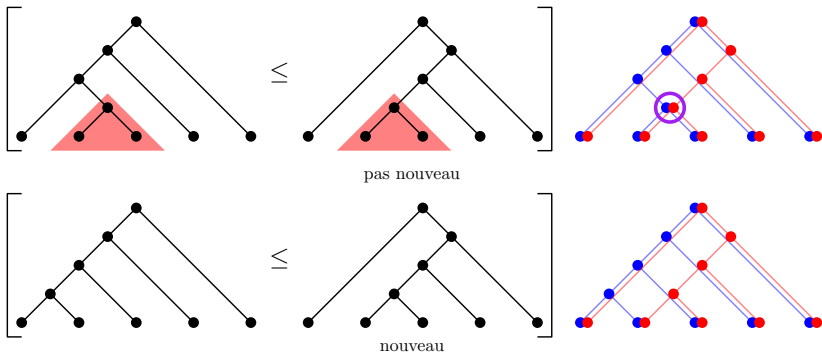
Lego d'intervalles de Tamari

Opération \oplus_i : composer deux intervalles en un plus grand



Nouveaux intervalles

Un intervalle I est **nouveau** s'il ne s'écrit pas sous la forme $I = I_1 \oplus_i I_2$.



Critère facile : partage de noeud interne non racine

Géométrie : nouveau \Leftrightarrow pas dans la même facette de l'associèdre

Une **structure d'opérate**, avec les nouveaux intervalles comment atomes

Décomposition unique des généraux en nouveaux \Rightarrow énumération

Compter les nouveaux intervalles

Théorème (Chapoton 2006)

Le nombre de nouveaux intervalles de taille n est

$$\frac{3 \cdot 2^{n-2} (2n-2)!}{(n-1)! (n+1)!}.$$

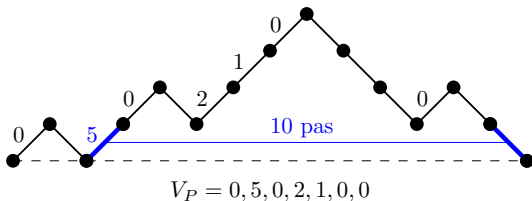
À partir de cette formule, Chapoton a compté les intervalles de Tamari.

La même formule que les [cartes planaires biparties](#) !

Chemin de Dyck

Chemin de Dyck :

- Composé des pas montant $(1, 1)$ et descendant $(1, -1)$,
- Commencant et terminant sur l'axe x ,
- Toujours au-dessus de l'axe x .



Pas en couple : reliés par un rayon horizontal au milieu sans obstacle

Vecteur de parenthésage (*Bracket vector*) V_P du chemin P :

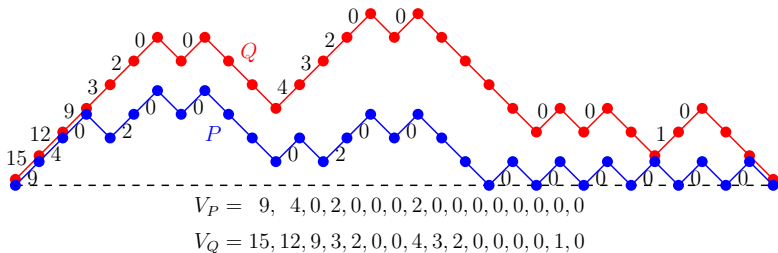
$V_P(i)$ = demi-longueur du i -ème pas montant avec son couple

Contact croissant : pas montant sur l'axe x

rcont(P) : nombre de contacts croissants de P .

Nouveaux intervalles, en terme de chemin de Dyck

Treillis de Tamari : $P \leq Q \iff V_P \leq V_Q$ composante par composante



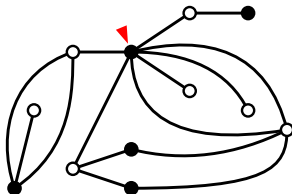
Un intervalle $[P, Q]$ est **nouveau** ssi :

- $V_Q(1) = n$;
- $\forall 1 \leq i \leq n, V_Q(i) \neq 0 \Rightarrow V_P(i) \leq V_Q(i+1)$.

V_P	\dots	a	\dots	\dots
V_Q	\dots	$\neq 0$	\wedge	b
				\dots

Cartes planaires biparties

Carte plane bipartie : plongement propre d'un graphe biparti dans le plan, **enracinée** en un coin sur la **face externe** d'un sommet noir



$$\mathbf{white}(M) = 7$$

$$\mathbf{black}(M) = 5$$

$$\mathbf{face}(M) = 5$$

$$\mathbf{outdeg}(M) = 6$$

Trois statistiques d'une carte plane bipartie M :

$\mathbf{white}(M) = \#\text{sommet blanc}$, $\mathbf{black}(M) = \#\text{sommet noir}$, $\mathbf{face}(M) = \#\text{face}$.

Et un **statique auxiliaire** : $\mathbf{outdeg}(M) = \text{demi-degré de la face externe}$

Équi-énumération raffinée

Théorème (Chapoton et Fusy, non publié)

Soit $F_{\mathcal{I}}(t, x; u, v, w)$ la fonction génératrice des nouveaux intervalles :

$$F_{\mathcal{I}}(t, x; u, v, w) = \sum_{n \geq 1} t^n \sum_{I \in \mathcal{I}_n} x^{\mathbf{rcont}(I)-1} u^{\mathbf{c}_{00}(I)} v^{\mathbf{c}_{01}(I)} w^{\mathbf{c}_{11}(I)}.$$

Soit $F_{\mathcal{M}}(t, x; u, v, w)$ la fonction génératrice des cartes planaire biparties :

$$F_{\mathcal{M}}(t; u, v, w) = \sum_{n \geq 0} t^n \sum_{M \in \mathcal{M}_n} x^{\mathbf{outdeg}(M)} u^{\mathbf{black}(M)} v^{\mathbf{white}(M)} w^{\mathbf{face}(M)}.$$

Alors on a

$$wF_{\mathcal{I}} = tF_{\mathcal{M}}.$$

Prouvé par décomposition récursive des deux familles d'objets.

Une preuve bijectif ?

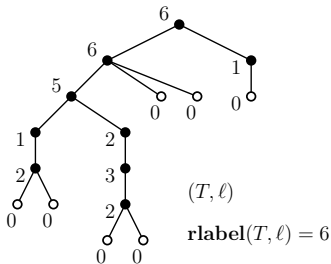
Arbres de degré

Arbre de degré : un couple (T, ℓ) avec

- T : arbre plane,
- ℓ : étiquetage sur les noeuds de T ,

tel que, pour tout noeud v ,

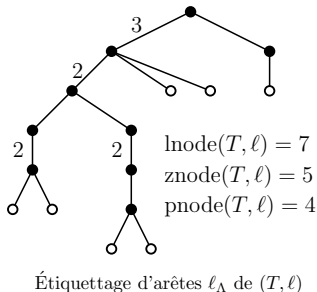
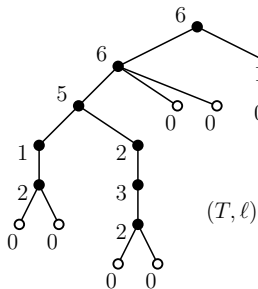
- v est une feuille $\Rightarrow \ell(v) = 0$;
- v a des enfants $v_1, v_2, \dots, v_k \Rightarrow \ell(v) = k - a + \sum_i \ell(v_i)$ pour un $0 \leq a \leq \ell(v_1)$.



rlabel (T, ℓ) : l'étiquette de la racine

Arbres de degré, version alternative

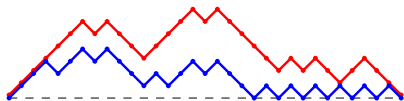
Étiquetage d'arêtes ℓ_Λ de (T, ℓ) : sur la première arête descendante de tout noeud v , avec la valeur de a reliée à $\ell(v)$. **Bijection claire** $\ell \Leftrightarrow \ell_\Lambda$



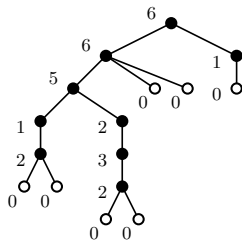
Trois statistiques :

- $\text{lnode}(T, \ell)$: #feuilles,
- $\text{znode}(T, \ell)$: #noeuds avec $\ell_\Lambda(e) = 0$ sur sa première arête e ,
- $\text{pnode}(T, \ell)$: #noeuds avec $\ell_\Lambda(e) \neq 0$ for sa première arête e .

Les bijections

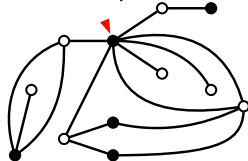


Intervalle nouveau de Chapoton de taille $n + 1$



Arbre de degré avec n arêtes

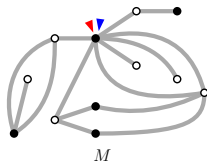
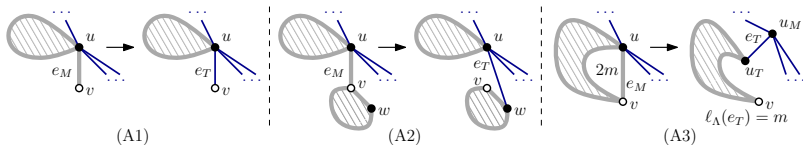
$$\begin{aligned} c_{0,0}(I) &= \text{lnode}(T, \ell) = \text{white}(M) \\ c_{0,1}(I) &= \text{znode}(T, \ell) = \text{black}(M) \\ c_{1,1}(I) &= \text{pnode}(T, \ell) = \text{face}(M) - 1 \\ \text{rcont}(I) &= \text{rlabel}(T, \ell) + 1 = \text{outdeg}(M) + 1 \end{aligned}$$



Carte planaire bipartie avec n arêtes

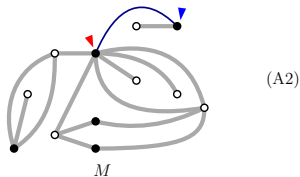
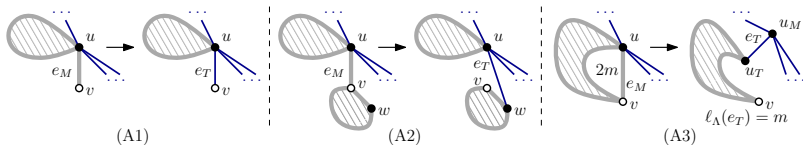
De cartes vers arbres : parcours en profondeur

DFS sur les **arêtes**, sens horaire, à partir de la racine, trois règles
arêtes de $M \rightarrow$ arêtes de (T, ℓ) . Seulement sur les sommets noirs.



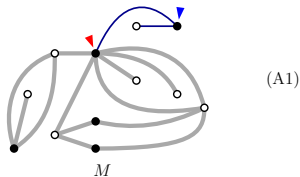
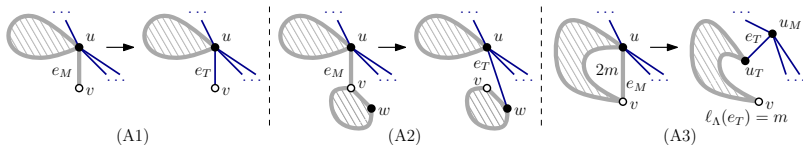
De cartes vers arbres : parcours en profondeur

DFS sur les **arêtes**, sens horaire, à partir de la racine, trois règles
arêtes de $M \rightarrow$ arêtes de (T, ℓ) . Seulement sur les sommets noirs.



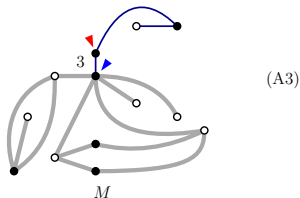
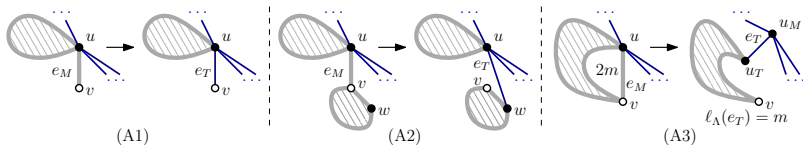
De cartes vers arbres : parcours en profondeur

DFS sur les arêtes, sens horaire, à partir de la racine, trois règles
arêtes de $M \rightarrow$ arêtes de (T, ℓ) . Seulement sur les sommets noirs.



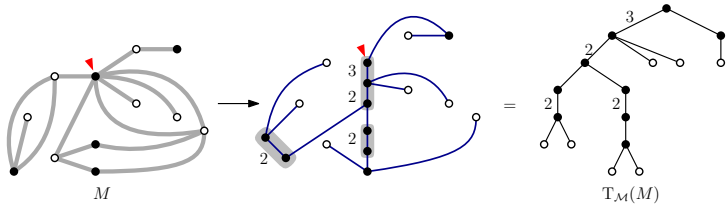
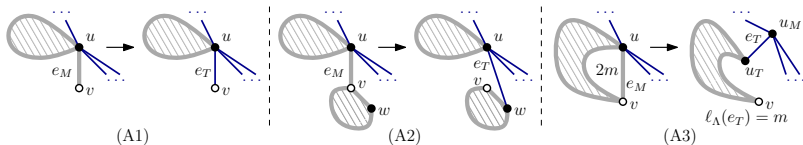
De cartes vers arbres : parcours en profondeur

DFS sur les **arêtes**, sens horaire, à partir de la racine, trois règles
arêtes de $M \rightarrow$ arêtes de (T, ℓ) . Seulement sur les sommets noirs.

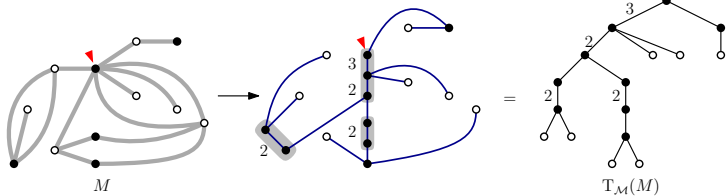
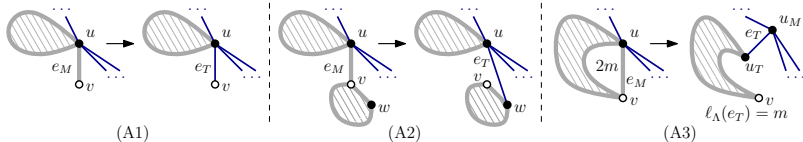


De cartes vers arbres : parcours en profondeur

DFS sur les **arêtes**, sens horaire, à partir de la racine, trois règles
arêtes de $M \rightarrow$ arêtes de (T, ℓ) . Seulement sur les sommets noirs.



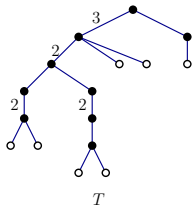
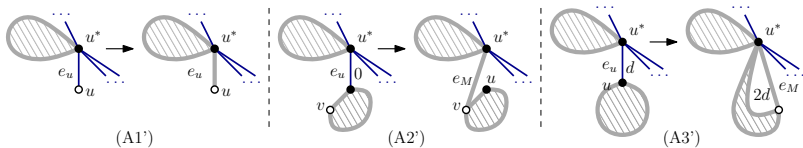
Correspondance de statistiques



- $\text{white}(M) = \text{inode}(T, \ell)$: noeud blanc \leftrightarrow feuille
- $\text{black}(M) = \text{znode}(T, \ell)$: découvert de noeud noir \leftrightarrow (A2)
- $\text{face}(M) = 1 + \text{pnode}(T, \ell)$: face interne \leftrightarrow (A3)
- $\text{outdeg}(M) = \text{rlabel}(T, \ell)$: face interne \leftrightarrow (A3)

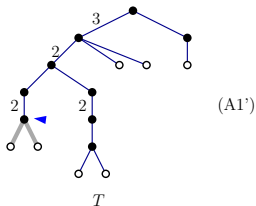
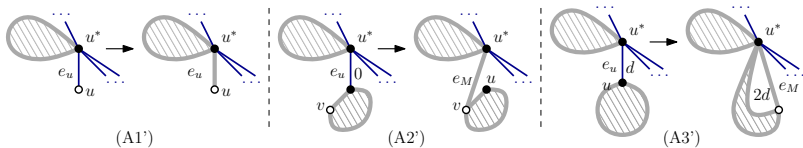
D'arbres vers cartes : parcours à l'envers

DFS sur les **arêtes**, sens anti-horaire, trois règles à la sortie d'une arête
arêtes de $(T, \ell) \rightarrow$ arêtes de M .



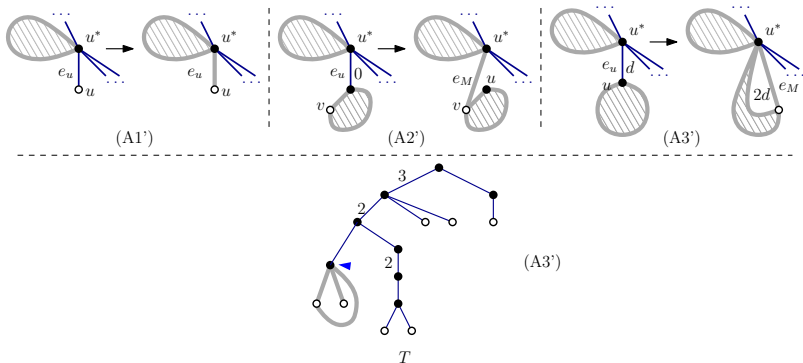
D'arbres vers cartes : parcours à l'envers

DFS sur les arêtes, sens anti-horaire, trois règles à la sortie d'une arête
arêtes de $(T, \ell) \rightarrow$ arêtes de M .



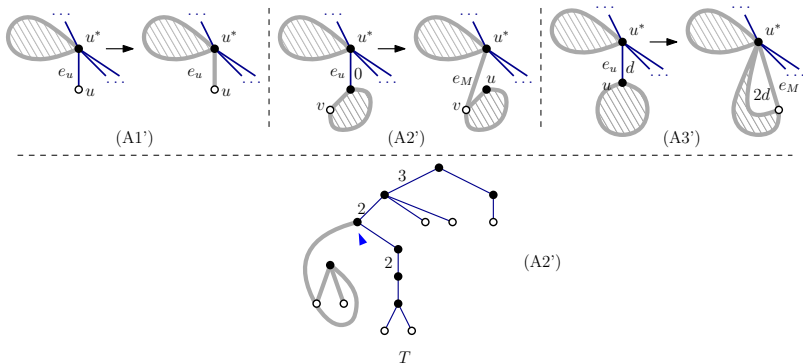
D'arbres vers cartes : parcours à l'envers

DFS sur les **arêtes**, sens anti-horaire, trois règles à la sortie d'une arête
arêtes de $(T, \ell) \rightarrow$ arêtes de M .



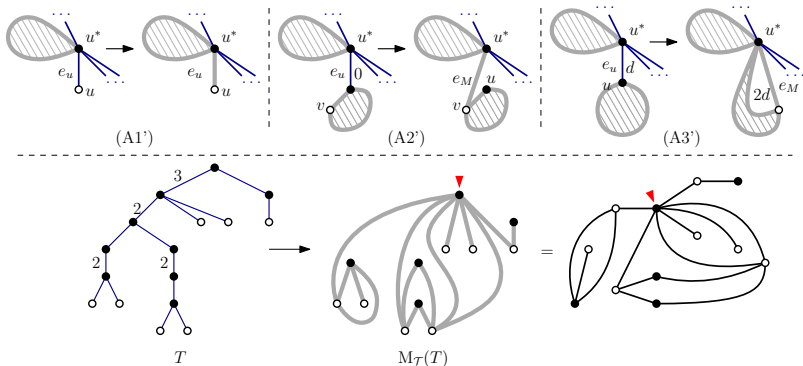
D'arbres vers cartes : parcours à l'envers

DFS sur les **arêtes**, sens anti-horaire, trois règles à la sortie d'une arête
arêtes de $(T, \ell) \rightarrow$ arêtes de M .



D'arbres vers cartes : parcours à l'envers

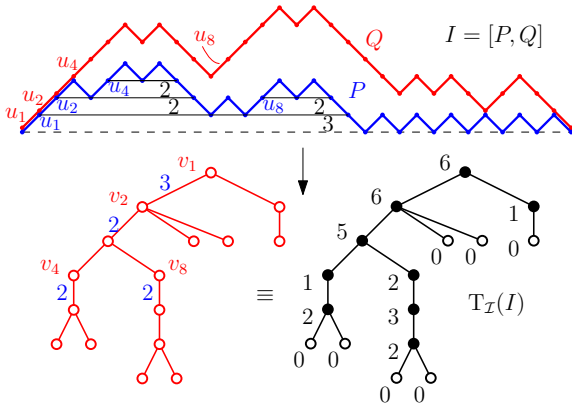
DFS sur les arêtes, sens anti-horaire, trois règles à la sortie d'une arête
arêtes de $(T, \ell) \rightarrow$ arêtes de M .



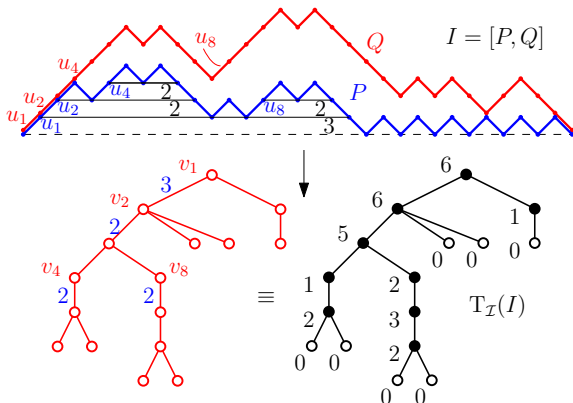
D'intervalles vers arbres : compter les contacts

De $I = [P, Q]$ à (T, ℓ) avec ℓ_Λ associé :

- T : à partir de Q' avec $Q = uQ'd$ (car $V_Q(1) = n$);
- ℓ_Λ : comptant les **contacts montant** des sous-chemins entre chaque couple de pas



Correspondance de statistiques

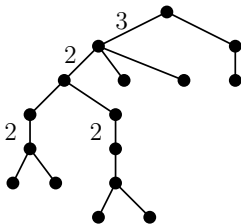


- $c_{00}(I) = \mathbf{lnode}(T, \ell) : V_Q(i) = 0 \Leftrightarrow$ feuille
- $c_{01}(I) = \mathbf{znode}(T, \ell) : V_P(i) = 0 \Leftrightarrow$ descente immédiate
- $c_{11}(I) = \mathbf{pnode}(T, \ell) : \text{Idem}$
- $\mathbf{rcont}(I) = \mathbf{rlabel}(T, \ell) : \text{tous les descentes non comptées dans } \ell_\Lambda$

D'arbres vers intervalles : une procédure de coloriage

Le **certificat** de chaque noeud de (T, ℓ) est défini par une procédure de coloration (préordre renversé) :

- Au début, tous les noeuds sont noirs ;
- v est une feuille \Rightarrow le certificat de v est v
- v n'est pas une feuille, avec e sa première arête \Rightarrow colorier les noeuds après v en préordre en rouge, arrêter juste avant le $(\ell_{\Delta}(e) + 1)$ -ème noeud noir. Le certificat de v est le dernier noeud visité.

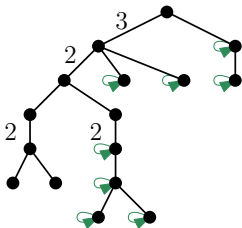


Fonction de certificat c de (T, ℓ) : $c(u) = \#$ noeuds dont u est certificat

D'arbres vers intervalles : une procédure de coloriage

Le **certificat** de chaque noeud de (T, ℓ) est défini par une procédure de coloration (préordre renversé) :

- Au début, tous les noeuds sont noirs ;
- v est une feuille \Rightarrow le certificat de v est v
- v n'est pas une feuille, avec e sa première arête \Rightarrow colorier les noeuds après v en préordre en rouge, arrêter juste avant le $(\ell_{\Delta}(e) + 1)$ -ème noeud noir. Le certificat de v est le dernier noeud visité.

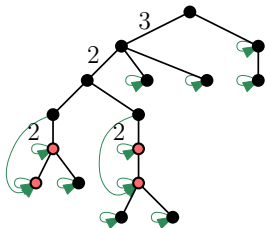


Fonction de certificat c de (T, ℓ) : $c(u) = \#$ noeuds dont u est certificat

D'arbres vers intervalles : une procédure de coloriage

Le **certificat** de chaque noeud de (T, ℓ) est défini par une procédure de coloration (préordre renversé) :

- Au début, tous les noeuds sont noirs ;
- v est une feuille \Rightarrow le certificat de v est v
- v n'est pas une feuille, avec e sa première arête \Rightarrow colorier les noeuds après v en préordre en rouge, arrêter juste avant le $(\ell_{\Delta}(e) + 1)$ -ème noeud noir. Le certificat de v est le dernier noeud visité.

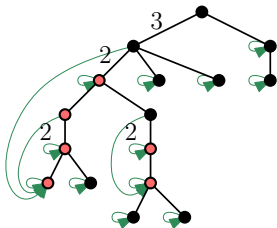


Fonction de certificat c de (T, ℓ) : $c(u) = \#$ noeuds dont u est certificat

D'arbres vers intervalles : une procédure de coloriage

Le **certificat** de chaque noeud de (T, ℓ) est défini par une procédure de coloration (préordre renversé) :

- Au début, tous les noeuds sont noirs ;
- v est une feuille \Rightarrow le certificat de v est v
- v n'est pas une feuille, avec e sa première arête \Rightarrow colorier les noeuds après v en préordre en rouge, arrêter juste avant le $(\ell_{\Delta}(e) + 1)$ -ème noeud noir. Le certificat de v est le dernier noeud visité.

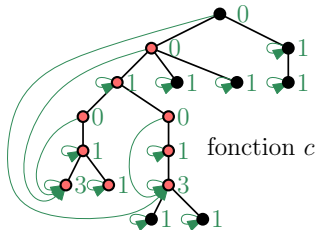


Fonction de certificat c de (T, ℓ) : $c(u) = \#$ noeuds dont u est certificat

D'arbres vers intervalles : une procédure de coloriage

Le **certificat** de chaque noeud de (T, ℓ) est défini par une procédure de coloration (préordre renversé) :

- Au début, tous les noeuds sont noirs ;
- v est une feuille \Rightarrow le certificat de v est v
- v n'est pas une feuille, avec e sa première arête \Rightarrow colorier les noeuds après v en préordre en rouge, arrêter juste avant le $(\ell_{\Delta}(e) + 1)$ -ème noeud noir. Le certificat de v est le dernier noeud visité.



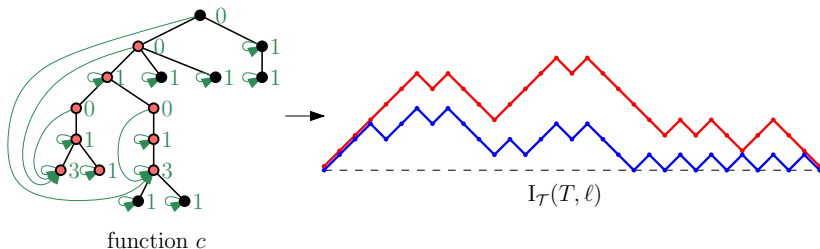
Fonction de certificat c de (T, ℓ) : $c(u) = \#$ noeuds dont u est certificat

D'arbres vers intervalles : fonction de certificat

Fonction de certificat c de (T, ℓ) : $c(u) = \#$ noeuds dont u est certificat

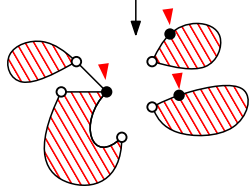
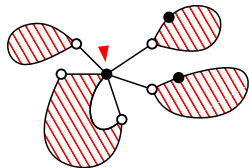
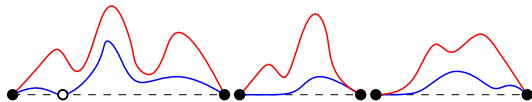
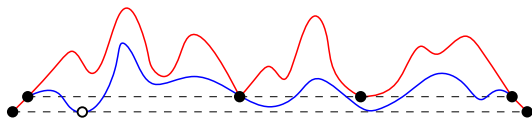
De (T, ℓ) à $I = [P, Q]$:

- P : concaténation de $ud^{c(v)}$ pour tout v en préordre ;
- Q : $uQ'd$ avec Q' obtenu par le contour de T .



Le fond de ces bijections

Décomposition récursive des deux objets (Chapoton et Fusy, non publié) :



L'arbre de degré est en fait **l'arbre de décomposition**.

Les bijections sont tous **canoniques** !

Travail en cours

- Symétrie \mathbb{S}_3 pour les cartes biparties, quid intervalles nouveaux ?
- Au moins une expliquée : blanc \leftrightarrow face \leftrightarrow dualité d'intervalles
- Relation avec les arbres $\beta(0, 1)$? Et d'autres objets ?
- Un intervalle général se décompose en intervalles nouveaux. Et les cartes ?

Travail en cours

- Symétrie \mathbb{S}_3 pour les cartes biparties, quid intervalles nouveaux ?
- Au moins une expliquée : blanc \leftrightarrow face \leftrightarrow dualité d'intervalles
- Relation avec les arbres $\beta(0, 1)$? Et d'autres objets ?
- Un intervalle général se décompose en intervalles nouveaux. Et les cartes ?

Merci de votre attention !