36. Sei $(A, +, \cdot)$ eine Boolesche Algebra und $S(A) = \mathrm{Hom}(A, \{0,1\})$ die Menge der Booleschen-Algebra-Homomorphismen von A nach $\{0,1\}$ ($\{0,1\}$ mit Addition und Multiplikation mod 2). Zeigen Sie, daß $S(A)$ keine Boolesche Algebra bzgl. elementweiser Addition und Multiplikation von Funktionen

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

ist.

37. Ergänzen Sie die Definition von $\models$ in der Vorlesung um die Fälle $F = (G \vee H)$ und $F = (G \leftrightarrow H)$.

38. Welches sind die freien Variablen der folgenden Formeln? Welche Vorkommen einer jeden Variable sind gebunden? Was ist der Bindungsbereich eines jeden vorkommenden Quantors?

1. $\forall x \exists y (\forall x (\neg(x = y) \rightarrow \neg(f(x) = f(y))) \wedge ((\exists x Sxy) \wedge Rxyz))$
2. $\exists x (x = y \vee ((\forall x (\forall y Rxyy) \rightarrow \exists z Ryxz) \vee y = z))$

39. Zeigen Sie durch Induktion nach der Struktur einer Formel, daß jedes Vorkommen einer Variable im Bindungsbereich von höchstens einem Quantor ist.

40. Gegeben die Sprache erster Ordnung (mit $=$) mit einem 2-stelligen Relationssymbol R. Finden Sie eine Struktur $\mathcal{M}$, die

$$\forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx)$$

aber nicht

$$\forall x \forall y ((Rxy \wedge Ryx) \rightarrow x = y)$$

erfüllt; und umgekehrt eine Struktur, welche die zweite Formel, aber nicht die erste, erfüllt.

41. Finden Sie Formeln F und G mit unversellem Abschluß F_1 bzw. G_1, sodaß F_1 und G_1 logisch äquivalent sind, nicht aber F und G. Hinweis: freie Variable.

42. Gegeben die Sprache erster Ordnung (mit $=$) mit einem 2-stelligen Relationssymbol R, einem 1-stelligen Funktionssymbol f und einem Konstantensymbol c. Finden Sie eine Formel, die von $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, \leq, exp(x) = e^x, 0)$ erfüllt wird, aber nicht von $\mathcal{N} = (\mathbb{Z}, \leq, g(x) = -2x, 0)$, und umgekehrt. (Sie können aus der Analysis bekannte Tatsachen ohne Beweis verwenden.)