PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Die Saitenschwingungsgleichung

A) Homogene Differentialgleichung mit homogenen Randbedingungen

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$
$$\text{RB} : u(0,t) = u(l,t) = 0$$
$$\text{AB} : u(x,0) = f(x) \ , \ u_t(x,0) = g(x)$$

Dann ist

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \{ A_k \cos(a\tfrac{k\pi}{l}t) + B_k \sin(a\tfrac{k\pi}{l}t)\} \sin(\tfrac{k\pi}{l}x)$$

eine Lösung der Differentialgleichung, welche die RB erfüllt.

Mit

$$A_k = \tfrac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin(\tfrac{k\pi}{l}x)\,dx \quad \text{und} \quad B_k = \tfrac{l}{ak\pi}\tfrac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin(\tfrac{k\pi}{l}x)\,dx$$

sind auch die AB erfüllt.

B) Inhomogene Differentialgleichung mit homogenen Randbedingungen

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \varphi(x,t)$$
$$\text{RB} : u(0,t) = u(l,t) = 0$$
$$\text{AB} : u(x,0) = f(x) \ , \ u_t(x,0) = g(x)$$

Man wählt den Ansatz : $\quad u(x,t) = w(x,t) + z(x,t) \quad$, wobei

$$w_{tt} = a^2 w_{xx} \ , \ \ w(0,t) = w(l,t) = 0 \ , \ \ w(x,0) = f(x) \ , \ \ w_t(x,0) = g(x)$$

.

Diese Gleichung wird wie in Fall A) gelöst.

$z(x,t)$ ist Lösung von $\quad z_{tt} = a^2 z_{xx} + \varphi(x,t) \quad$ mit

$$z(0,t) = z(l,t) = 0 \quad \text{und} \quad z(x,0) = z_t(x,0) = 0 \ .$$

Man trifft nun den Ansatz : $\quad z = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k(t) \sin(\frac{k\pi}{l}x)$.

Dann entwickelt man $\varphi(x,t)$ in eine Fourier-Reihe

$$\varphi(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) \sin(\tfrac{k\pi}{l}x) \quad \text{, wobei} \quad \varphi_k(t) = \tfrac{2}{l}\int_0^l \varphi(x,t) \sin(\tfrac{k\pi}{l}x)\, dx \ .$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ löse man dann die (gewöhnliche) Differentialgleichung

$$z_k'' + (\tfrac{ak\pi}{l})^2 z_k = \varphi_k(t) \ , \quad z_k(0) = z_k'(0) = 0 \ .$$

C) Inhomogene Differentialgleichung mit inhomogenen Randbedingungen

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \varphi(x,t)$$
$$\text{RB} : u(0,t) = r(t) \ , \ u(l,t) = s(t)$$
$$\text{AB} : u(x,0) = f(x) \ , \ u_t(x,0) = g(x)$$

Im ersten Schritt werden die inhomogenen Randbedingungen eliminiert.

Man setzt $\quad u(x,t) = v(x,t) + z^*(x,t) \quad$ mit $z^*(x,t) = r(t) + \frac{x}{l}(s(t) - r(t))$.

Setzt man weiters $\quad \varphi^*(x,t) = \varphi(x,t) - z^*_{tt}(x,t) \quad$ und

$$f^*(x) = f(x) - z^*(x,0) \ , \quad g^*(x) = g(x) - z^*_t(x,0) \ ,$$

dann ergibt sich durch Einsetzen folgende Differentialgleichung für $v(x,t)$:

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \varphi^*(x,t)$$
$$\text{RB} : v(0,t) = v(l,t) = 0$$
$$\text{AB} : v(x,0) = f^*(x) \ , \quad v_t(x,0) = g^*(x)$$

Diese Differentialgleichung wird wie in Fall B) gelöst .

Die Wärmeleitungsgleichung

A) Homogene Differentialgleichung mit homogenen Randbedingungen

$$u_t = a^2 u_{xx}$$
$$\text{RB}: u(0,t) = u(l,t) = 0$$
$$\text{AB}: u(x,0) = f(x)$$

Dann ist

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\tfrac{k\pi}{l}x) \exp(-(\tfrac{ak\pi}{l})^2 t)$$

eine Lösung der Differentialgleichung, welche die RB erfüllt.

Mit $\quad A_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x) \sin(\frac{k\pi}{l}x)\, dx \quad$ sind auch die AB erfüllt.

B) Inhomogene Differentialgleichung mit homogenen Randbedingungen

$$u_t = a^2 u_{xx} + \varphi(x,t)$$
$$\text{RB}: u(0,t) = u(l,t) = 0$$
$$\text{AB}: u(x,0) = f(x)$$

Man wählt den Ansatz : $\quad u(x,t) = w(x,t) + z(x,t) \quad$, wobei

$$w_t = a^2 w_{xx} \quad , \quad w(0,t) = w(l,t) = 0 \quad , \quad w(x,0) = f(x) \ .$$

Diese Gleichung wird wie in Fall A) gelöst.

$z(x,t)$ ist Lösung von $\quad z_t = a^2 z_{xx} + \varphi(x,t) \quad$ mit

$$z(0,t) = z(l,t) = 0 \quad , \quad z(x,0) = 0 \ .$$

Man trifft nun den Ansatz : $\quad z = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k(t) \sin(\frac{k\pi}{l}x)$.

Dann entwickelt man $\varphi(x,t)$ in eine Fourier-Reihe

$$\varphi(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) \sin(\tfrac{k\pi}{l}x) \quad , \text{wobei} \quad \varphi_k(t) = \tfrac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x,t) \sin(\tfrac{k\pi}{l}x)\, dx \ .$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ löse man dann die (gewöhnliche) Differentialgleichung

$$z_k' + (\tfrac{ak\pi}{l})^2 z_k = \varphi_k(t) \quad , \quad z_k(0) = 0 \ .$$

C) Inhomogene Differentialgleichung mit inhomogenen Randbedingungen

$$u_t = a^2 u_{xx} + \varphi(x,t)$$
$$\text{RB} : u(0,t) = r(t) \quad , \quad u(l,t) = s(t)$$
$$\text{AB} : u(x, 0 = f(x)$$

Im ersten Schritt werden die inhomogenen Randbedingungen eliminiert.

Man setzt $\quad u(x,t) = v(x,t) + z^*(x,t) \quad$ mit $z^*(x,t) = r(t) + \frac{x}{l}(s(t) - r(t))$.

Setzt man weiters $\quad \varphi^*(x,t) = \varphi(x,t) - z_t^*(x,t) \quad$ und

$$f^*(x) = f(x) - z^*(x,0) \ ,$$

dann ergibt sich durch Einsetzen folgende Differentialgleichung für $v(x,t)$:

$$v_t = a^2 v_{xx} + \varphi^*(x,t)$$
$$\text{RB} : v(0,t) = v(l,t) = 0$$
$$\text{AB} : v(x,0) = f^*(x)$$

Diese Differentialgleichung wird wie in Fall B) gelöst .