Summierbarkeit in Banachräumen

Vorbemerkung: Seien X und I beliebige Mengen. Eine Abbildung $f : I \to X$ mit $f(i) = x_i$ für alle $i \in I$ definiert eine (indizierte) Familie $(x_i)_{i\in I}$ von Elementen von X . Umgekehrt entspricht jeder (indizierten) Familie $(x_i)_{i\in I}$ von Elementen von X eine Abbildung $f : I \to X$.

1) Gerichtete Mengen und Netze

Definition: Eine partial geordnete Menge $(I, \leq)$ heißt **gerichtet**, wenn je zwei Elemente eine obere Schranke besitzen, d.h.
$\forall\, x, y \in I \;\; \exists\, z \in I$ sodass $x \leq z$ und $y \leq z$.

Beispiele:
- $(\mathbb{N}, \leq)$ und $(\mathbb{R}, \leq)$, jeweils mit der natürlichen Ordnung, sind gerichtete Mengen.
- Jede linear geordnete Menge ist eine gerichtete Menge.
- Sei I eine beliebige Menge, und J die Menge der endlichen Teilmengen von I . Dann ist J partial geordnet durch $E_1 \leq E_2 \Leftrightarrow E_1 \subseteq E_2$ für $E_1, E_2 \in J$. Offenbar ist $(J, \leq)$ eine gerichtete Menge.

Definition: Sei X eine beliebige Menge und $(I, \leq)$ eine gerichtete Menge. Eine Abbildung $f : I \to X$ heißt ein **Netz** in X.

Insbesondere ist damit jede Folge in X ein Netz in X $(I = \mathbb{N})$. Netze werden daher auch als "verallgemeinerte Folgen" bezeichnet. Ein Netz in X ist also eine Familie $(x_i)_{i\in I}$ von Elementen von X , wobei die Indexmenge I gerichtet ist.

2) Netze in metrischen (und normierten) Räumen

In metrischen (und damit auch normierten) Räumen läßt sich ein Konvergenzbegriff für Netze sinnvoll definieren.

Definition: Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in X .

i) $(x_i)_{i\in I}$ heißt **konvergent** gegen $x \in X$, $(x_i)_{i\in I} \to x$, wenn
$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ i_0 \in I$ sodass $\forall\ i \geq i_0\ :\ d(x, x_i) < \varepsilon$.

ii) $(x_i)_{i\in I}$ heißt **Cauchy-Netz** in X , wenn
$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ i_0 \in I$ sodass $\forall\ i, j \geq i_0\ :\ d(x_i, x_j) < \varepsilon$.

Offenbar werden dadurch geeignete Verallgemeinerungen der bekannten Begriffe "konvergente Folge" und "Cauchy-Folge" geliefert. Man überzeugt sich leicht, daß jedes konvergente Netz ein Cauchy-Netz ist und daß die Konvergenz von Netzen eindeutig ist.

<u>**Satz 1:**</u> Für einen metrischen Raum (X, d) sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) (X, d) ist vollständig.

(2) Jedes Cauchy-Netz in X konvergiert.

Beweis: (2) $\Rightarrow$ (1) ist klar, weil mit (2) auch jede Cauchy-Folge konvergiert.
(1) $\Rightarrow$ (2) : Sei $(x_i)_{i\in I}$ ein Cauchy-Netz in X . Zu $\varepsilon = 1\ \exists\ i_1 \in I$ sodass $\forall\ i, j \geq i_1$: $d(x_i, x_j) < 1$. Weiters, zu $\varepsilon = \frac{1}{2}\ \exists\ i_2^* \in I$ sodass $\forall\ i, j \geq i_2^*\ :\ d(x_i, x_j) < \frac{1}{2}$. Wegen der Gerichtetheit von I gibt es eine obere Schranke i_2 von i_1 und i_2^* . Dann gilt natürlich auch $d(x_i, x_j) < \frac{1}{2}\ \ \forall\ i, j \geq i_2$. Wir erhalten damit (induktiv) eine monoton steigende Indexfolge $i_1 \leq i_2 \leq i_3 ...$ mit $d(x_i, x_j) < \frac{1}{2^n}\ \ \forall\ i, j \geq i_n$. Wir zeigen nun, daß die Folge (x_{i_n}) eine Cauchy-Folge ist. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Für $n, m \geq k$ ist $i_n, i_m \geq i_k$ und damit $d(x_{i_n}, x_{i_m}) < \frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Also ist (x_{i_n}) eine Cauchy-Folge und wegen der Vollständigkeit von (X, d) konvergent gegen ein $x \in X$.
Wir behaupten nun, daß $(x_i)_{i\in I} \to x$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $d(x, x_{i_m}) < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $i \geq i_m$ gilt $d(x_i, x_{i_m}) < \frac{1}{2^m}$ und damit $d(x, x_i) \leq d(x, x_{i_m}) + d(x_{i_m}, x_i) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^m} < \varepsilon$. Also gilt $(x_i)_{i\in I} \to x$. $\square$

<u>3) Summierbarkeit in normierten Räumen bzw. Banachräumen</u>

Für einen normierten $\mathbb{K}$-Vektorraum $(X, \|\ \|)$ ist die Summe von endlich vielen Vektoren von X stets erklärt. Wir wollen nun einen sinnvollen Begriff für die Summe einer (beliebigen) Familie von Vektoren definieren. Im folgenden wird stets $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sein.

<u>**Definition:**</u> Sei $(X, \|\ \|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(x_i)_{i\in I}$ eine Familie von Elementen von X .

1) $(x_i)_{i\in I}$ heißt **summierbar** zur Summe $x \in X$, kurz $\sum\limits_{i\in I} x_i = x$, wenn

zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $E_0 \subseteq I$ existiert sodaß für jede endliche Teilmenge $E \subseteq I$ mit $E \supseteq E_0$ gilt : $\|x - \sum\limits_{i \in E} x_i\| < \varepsilon$.

2) $(x_i)_{i \in I}$ heißt **absolut summierbar** wenn $(\|x_i\|)_{i \in I}$ summierbar in $\mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Zu $(x_i)_{i \in I}$ sei J die gerichtete Menge der endlichen Teilmengen von I. Summierbarkeit von $(x_i)_{i \in I}$ (zur Summe x) heisst somit nichts anderes, als daß das Netz $f : J \to X$ mit $E \in J \mapsto \sum\limits_{i \in E} x_i$ gegen x konviergiert.

Satz 2: Sei $(x_i)_{i \in I}$ summierbar zur Summe $x \in X$. Dann ist $\{i \in I : x_i \neq 0\}$ höchstens abzählbar.

Beweis: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wähle eine endliche Teilmenge $E_n \subseteq I$ sodaß für jede endliche Teilmenge $E \subseteq I$ mit $E \supseteq E_n$ gilt : $\|x - \sum\limits_{i \in E} x_i\| < \frac{1}{2n}$. Die Menge $F = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_n$ ist dann abzählbar. Sei nun $j \in I \setminus F$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\|x_j\| = \|\sum_{i \in E_n \cup \{j\}} x_i - \sum_{i \in E_n} x_i\| \leq \|\sum_{i \in E_n \cup \{j\}} x_i - x\| + \|x - \sum_{i \in E_n} x_i\| \leq \frac{1}{n} ,$$

woraus $\|x_j\| = 0$ bzw. $x_j = 0$ folgt. $\square$

Satz 3: (Cauchy-Kriterium)

Sei $(X, \| \|)$ ein Banachraum und $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie von Elementen von X . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $(x_i)_{i \in I}$ ist summierbar.

(2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Teilmenge $E_0 \subseteq I$ sodaß für jede endliche Teilmenge $E \subseteq I$ mit $E \cap E_0 = \emptyset$ gilt : $\|\sum\limits_{i \in E} x_i\| < \varepsilon$.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2) : Sei $\sum\limits_{i \in I} x_i = x$ und $\varepsilon > 0$. Wähle eine endliche Teilmenge $E_0 \subseteq I$ sodaß für jede endliche Teilmenge $E \subseteq I$ mit $E \supseteq E_0$ gilt : $\|x - \sum\limits_{i \in E} x_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt für alle endlichen Teilmengen $E \subseteq I$ mit $E \cap E_0 = \emptyset$ offenbar

$$\|\sum_{i \in E} x_i\| = \|\sum_{i \in E \cup E_0} x_i - \sum_{i \in E_0} x_i\| \leq \|\sum_{i \in E \cup E_0} x_i - x\| + \|x - \sum_{i \in E_0} x_i\| < \varepsilon .$$

(2) $\Rightarrow$ (1) : Sei J die Menge der endlichen Teilmengen von I . Nach Satz 1 ist zu zeigen, daß $(\sum\limits_{i \in E} x_i)_{E \in J}$ ein Cauchy-Netz ist. Sei $\varepsilon > 0$ und gemäß (2) E_0 zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gewählt. Für alle $E \in J$ mit $E \supseteq E_0$ gilt dann offenbar $\|\sum\limits_{i \in E} x_i - \sum\limits_{i \in E_0} x_i\| = \|\sum\limits_{i \in E \setminus E_0} x_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Für alle $E, F \in J$ mit $E, F \supseteq E_0$ gilt dann weiters

$$\|\sum_{i \in E} x_i - \sum_{i \in F} x_i\| \leq \|\sum_{i \in E} x_i - \sum_{i \in E_0} x_i\| + \|\sum_{i \in F} x_i - \sum_{i \in E_0} x_i\| < \varepsilon . \square$$

Folgerung: Sei $(X, \| \|)$ ein Banachraum. Für $(x_i)_{i \in I}$ gilt :

1) $(x_i)_{i\in I}$ ist absolut summierbar $\Rightarrow$ $(x_i)_{i\in I}$ ist summierbar

2) $(x_i)_{i\in I}$ ist summierbar $\Rightarrow$ $(x_i)_{i\in I_1}$ ist summierbar für jede Teilmenge $I_1 \subseteq I$.

__Beweis:__ Sei J wiederum die Menge der endlichen Teilmengen von I und sei $\varepsilon > 0$. Wähle $E_0 \in J$ sodaß für alle $E \in J$ mit $E \cap E_0 = \emptyset$ gilt : $|\sum\limits_{i\in E} \|x_i\|| < \varepsilon$ (bzw. $\|\sum\limits_{i\in E} x_i\| < \varepsilon$ für (2)) . Es folgt dann $\|\sum\limits_{i\in E} x_i\| \leq \sum\limits_{i\in E} \|x_i\| < \varepsilon$, also die Summierbarkeit von $(x_i)_{i\in I}$.
Für (2) sei J_1 die Menge der endlichen Teilmengen von I_1 . Wegen $E_0 \cap I_1 \in J_1$ und $E \cap E_0 = \emptyset$ für jedes $E \in J_1$ mit $E \cap (E_0 \cap I_1) = \emptyset$ gilt auch $\|\sum\limits_{i\in E} x_i\| < \varepsilon$, und damit die Summierbarkeit von $(x_i)_{i\in I_1}$. $\square$

__Bemerkung:__ Ohne Beweis seien vermerkt, daß die Implikation in (1) im allgemeinen nicht umkehrbar ist. Für $X = \mathbb{C}$ folgt allerdings aus der Summierbarkeit von $(x_i)_{i\in I}$ die absolute Summierbarkeit !

__Satz 4:__ Sei $(X, \| \|)$ ein normierter Raum, $\sum\limits_{i\in I} x_i = x$ und $\sigma : I \to I$ bijektiv. Dann ist $(x_{\sigma(i)})_{i\in I}$ summierbar und $\sum\limits_{i\in I} x_{\sigma(i)} = x$.

__Beweis:__ Sei J die Menge der endlichen Teilmengen von I und sei $\varepsilon > 0$. Wähle $E_0 \in J$ sodaß für alle $E \in J$ mit $E \supseteq E_0$ gilt : $\|x - \sum\limits_{i\in E} x_i\| < \varepsilon$. Dann ist $\sigma^{-1}(E_0) \in J$, und für alle $F \in J$, $F \supset \sigma^{-1}(E_0)$ folgt

$$\|\sum_{i\in F} x_{\sigma(i)} - x\| = \|\sum_{s\in\sigma(F)} x_s - x\| < \varepsilon \ . \quad \square$$

Der Beweis der folgenden Aussage sei dem Leser überlassen.

__Satz 5:__ Sei $(X, \| \|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\sum\limits_{i\in I} x_i = x$, $\sum\limits_{i\in I} y_i = y$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt : $\sum\limits_{i\in I} (x_i + y_i) = x + y$ und $\sum\limits_{i\in I} (\lambda x_i) = \lambda x$.

Unter Verwendung des Cauchy-Kriteriums läßt sich folgende Aussage leicht nachweisen.

__Satz 6:__ Sei $(H, < >)$ ein Hilbertraum, und $(u_i)_{i\in I}$ eine Familie orthogonaler Vektoren. Dann gilt:

$(u_i)_{i\in I}$ ist summierbar (in H) $\Leftrightarrow$ $(\|u_i\|^2)_{i\in I}$ ist summierbar (in $\mathbb{R}$).

4) Summierbarkeit in $\mathbb{R}$

Vereinbarung: Für die Indexmenge I sei J die Menge der endlichen Teilmengen von I .

Satz 7: Sei $(x_i)_{i\in I}$ eine Familie reeller Zahlen mit $x_i \geq 0 \ \forall\, i \in I$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $(x_i)_{i\in I}$ ist summierbar.

(2) $\exists\, a \in \mathbb{R}$ sodaß $\forall\, E \in J \ : \ \sum\limits_{i\in E} x_i \leq a$.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2) : Sei $\sum\limits_{i\in I} x_i = x$. Setze $a := x$. Aus der Definition von $\sum\limits_{i\in I} x_i$ folgt sofort, daß $\sum\limits_{i\in E} x_i \leq a$ für alle $E \in J$ ist.
(2) $\Rightarrow$ (1) : Wegen (2) existiert $x = \sup\{ \sum\limits_{i\in E} x_i \ : \ E \in J \}$. Man sieht sofort, daß $\sum\limits_{i\in I} x_i = x$ ist. $\square$

Bemerkung: Sei $(x_i)_{i\in I}$ eine summierbare Familie reeller Zahlen mit $x_i \geq 0$ für alle $i \in I$. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ mit $f(i) = x_i \ \ \forall\, i \in I$, und μ das Zählmaß auf I . Dann gilt offenbar :

$$\int\limits_I f\, d\mu = \sum_{i\in I} x_i$$

Bemerkung: Seien $(x_i)_{i\in I}$ und $(y_i)_{i\in I}$ Familien nichtnegativer reeller Zahlen, und gelte $x_i \leq y_i \ \ \forall\, i \in I$. Falls $(y_i)_{i\in I}$ summierbar ist, gilt offenbar $\sum\limits_{i\in I} x_i \leq \sum\limits_{i\in I} y_i$.

Mit bekannten Überlegungen aus der Maßtheorie (Definition des Lebesgue Integrals) kann schließlich folgende wichtige Verallgemeinerung der Satz 7 folgenden Bemerkung gezeigt werden:

Satz 8: Sei I eine Menge und $f : I \to \mathbb{K}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C})$. Sei wiederum $f(i) = x_i \ \ \forall\, i \in I$, und μ das Zählmaß auf I . Dann gilt :

f summierbar $\Leftrightarrow$ f integrierbar (über I) .

In diesem Fall ist dann $\int\limits_I f\, d\mu = \sum\limits_{i\in I} x_i$.