Cauchy-Folgen, Konstruktion von $\mathbb{R}$

Eine wichtige Rolle in der modernen Mathematik spielt der Begriff der Cauchy-Folge (auch Fundamentalfolge genannt), den wir zur Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ bentzen werden. (Auch im folgenden sei $\mathbb{K}$ stets ein geordneter Körper, wobei das Einselement mit 1 bezeichnet wird.)

Definition. Eine Folge (in $\mathbb{K}$) heißt **Cauchy-Folge**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m > N_\varepsilon$.

Anschaulich gesagt "verdichten sich" die Folgenglieder an einer bestimmten "Stelle" (die aber nicht notwendigerweise in $\mathbb{K}$ liegen muß).

Analog wie der entsprechende Satz über konvergente Folgen kann auch die folgende Aussage gezeigt werden (Beweis: Übung).

Satz. Seien (a_n) und (b_n) Cauchy-Folgen in $\mathbb{K}$.

1) (a_n) ist eine beschränkte Folge,

2) $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$ und $(a_n b_n)$ sind Cauchy-Folgen,

3) Ist (b_n) "weg beschränkt von 0", d.h. $\exists\, \delta > 0$ mit $|b_n| \geq \delta \ \ \forall\, n$, dann ist auch $(\frac{1}{b_n})$ eine Cauchy-Folge.

Satz. Jede konvergente Folge (a_n) ist eine Cauchy-Folge.

Beweis. Sei $a_n \to a$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Somit $|a_n - a_m| = |(a_n - a) - (a_m - a)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon$.

Dieser Satz ist allerdings i.a. nicht umkehrbar. Allerdings gilt

Satz. Hat die Cauchy-Folge (a_n) eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}) (mit Grenzwert a) , dann gilt $a_n \to a$.

Beweis. Sei $a_{n_k} \to a$ und $\varepsilon > 0$. Für ein geeignetes N_ε ist dann $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n_k > N_\varepsilon$ und $|a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n, n_k > N_\varepsilon$ (weil (a_n) Cauchy-Folge ist). Somit ist $|a_n - a| = |(a_n - a_{n_k}) - (a_{n_k} - a)| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon$.

Nun wollen wir zeigen, dass es Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ geben kann, die (in $\mathbb{Q}$) keinen Grenzwert besitzen.

Betrachte die Folge (a_n) mit $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$.

i) Mittels vollständiger Induktion gilt, dass $1 \leq a_n \leq 2 \quad \forall n$.

ii) Setze $b_n = a_n^2 \ \forall\, n$, dann ist $b_1 = 1$ und $b_{n+1} = a_{n+1}^2 = \frac{b_n}{4} + \frac{1}{b_n} + 1$.

iii) Damit ist $2 \leq b_n$ für $n \geq 2$ (wegen i)) . Weiters zeigt man leicht induktiv, dass $b_n \leq 2 + \frac{1}{2^n}$. Somit gilt $b_n \to 2$.

iv) (a_n) ist eine Cauchy-Folge, weil
$|a_n - a_m| \leq 2|a_n - a_m| \leq (a_n + a_m)|a_n - a_m| = |a_n^2 - a_m^2| = |b_n - b_m|$ und (b_n) als konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist.

v) Annahme: $a_n \to a$ mit $a \in \mathbb{Q}$. Dann ist $a^2 = 2$, ein Widerspruch, weil man sich leicht überlegen kann, dass es keine rationale Zahl $a = \frac{p}{q}$ geben kann mit $\frac{p^2}{q^2} = 2$.
Dies bedeutet u.a. auch, dass die Gleichung $x^2 = 2$ in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar ist.

Folgerung. Es können also in einem geordneten Körper (wie etwa $\mathbb{Q}$) noch "Lücken" existieren, gegen die sich Cauchy-Folgen "verdichten" können. Aus diesem Grund sucht man nach einer Art "Vervollständigung", wo dieses Phänomen nicht mehr auftreten kann.

Definition. Ein geordneter Körper $\mathbb{K}$ heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ konvergiert, d.h. einen Grenzwert in $\mathbb{K}$ besitzt.

Unsere Aufgabe ist es nun, den Körper $\mathbb{Q}$ zu einem Körper $\mathbb{R}$ zu erweitern, welcher vollständig ist und wo jede Gleichung der Form $x^n = a$ mit $a \in \mathbb{Q}$ (später $\mathbb{R}$) und $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ lösbar ist. Im folgenden ist also $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

Da verschiedene Cauchy-Folgen dieselbe "Stelle" beschreiben können (wie etwa $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = \frac{1}{n^2}$ die "Stelle" 0 beschreiben), macht es Sinn, Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen zu betrachten.

Definition. Zwei Cauchy-Folgen (x_n) und (y_n) heißen **äquivalent**, symbolisch $(x_n) \sim (y_n)$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$.

Man überzeugt sich leicht, dass " $\sim$ " tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ ist. Über die beteiligten Folgen (x_n) und (y_n) selbst wird nichts über eine etwaige Konvergenz gefordert, lediglich dass die Differenzfolge eine Nullfolge ist.

Definition. Eine **reelle Zahl** ist eine Äquivalenzklasse von Cauchy-Folgen reeller Zahlen. Die Menge aller reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Damit kann nun folgendermaßen ein geordneter Körper konstruiert werden (Details siehe Endl-Luh: Analysis 1) :

• Wegen $(x_n) \sim (x'_n)$ und $(y_n) \sim (y'_n) \Rightarrow (x_n + y_n) \sim (x'_n + y'_n)$ sowie $(x_n y_n) \sim (x'_n y'_n)$ kann mittels Wahl eines beliebigen Repräsentanten einer Äquivalenzklasse eine Addition bzw. Multiplikation in $\mathbb{R}$ erklärt werden, präzise: $[(x_n)] + [(y_n)] := [(x_n + y_n)]$ und $[(x_n)][(y_n)] := [(x_n y_n)]$.

• Mit diesen Operationen ist $\mathbb{R}$ dann ein Körper.

• $\mathbb{Q}$ ist in $\mathbb{R}$ "enthalten", indem jedem $q \in \mathbb{Q}$ jene Äquivalenzklasse zugeordnet wird, welche die konstante Folge (q) enthält.

• Einführung einer Ordnung in $\mathbb{R}$ durch "positive Cauchy-Folgen" (d.h. eine Cauchy-Folge (a_n) heißt positiv wenn $\exists\, \delta > 0$ mit $a_n \geq \delta$ für fast alle n) . Beachte: ist eine Cauchy-Folge (a_n) positiv, dann auch alle dazu äquivalenten Cauchy-Folgen.
Diese Ordnung auf $\mathbb{R}$ setzt die bereits bekannte Ordnung auf $\mathbb{Q}$ fort.

• Ein Absolutbetrag auf $\mathbb{R}$ ist durch die zuvor definierte Ordnung nun gegeben.

• Bezüglich der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zeigt man zuerst, dass rationale Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$ konvergieren (nämlich gegen den durch diese Folge repräsentierten "Punkt" von $\mathbb{R}$), und in weiterer Folge dass damit auch reelle Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$ konvergieren, weil eine reelle Zahl "beliebig genau durch eine rationale Zahl approximierbar ist".
(Man wähle eine die reelle Zahl r repräsentierende rationale Cauchy-Folge

(q_n). Sei $\varepsilon > 0$. $\exists\ N_\varepsilon$ mit $|q_n - q_m| < \varepsilon$ für $n, m \geq N_\varepsilon$. Sei q jene reelle (und zugleich rationale Zahl), welche durch die konstante Folge (q_m) repräsentiert wird. Dann gilt $|r - q| = |(q_n) - (q_m)| = |(q_n - q_m)| < \varepsilon$, weil $|q_n - q_m| < \varepsilon$ für fast alle n gilt.)

Somit ergibt sich

Satz. (Konvergenzkriterium von Cauchy) Eine reelle Zahlenfolge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Eine wichtige Folgerung ist nun

Satz. Eine nach oben beschränkte Teilmenge $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein **Supremum**, d.h. eine kleinste obere Schranke.

Beweis. Wir betrachten die sogenannten dyadischen Zahlen, i.e. Zahlen der Form $\frac{p}{2^n}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Für festes $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir damit "Gitterpunkte", wobei aufeinanderfolgende Gitterpunkte den Abstand $\frac{1}{2^n}$ haben. Daraus folgt, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Gitterpunkt $q_n = \frac{p_n}{2^n}$ gibt mit $A \subseteq (-\infty, q_n)$ und $A \not\subseteq (-\infty, q_n - \frac{1}{2^n})$. Somit ist jedes q_n eine obere Schranke von A und $q_{n+1} = q_n$ oder $q_{n+1} = q_n - \frac{1}{2^{n+1}}$. Weil $|q_m - q_n| < \frac{1}{2^n}$ für $m > n$, ist (q_n) eine rationale Cauchy-Folge, welche laut Voraussetzung konvergiert, etwa gegen $a \in \mathbb{R}$. Man sieht leicht, dass a selbst eine obere Schranke von A ist. Nun wähle $a_n \in A$ mit $q_n - \frac{1}{2^n} \leq a_n \leq q_n$. Dann konvergiert die Folge (a_n) ebenfalls gegen a, woraus folgt, dass es keine echt kleinere obere Schranke von A geben kann. Dies bedeutet, dass a das Supremum von A ist.

Folgerung. Eine nach unten beschränkte Teilmenge $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein **Infimum**, d.h. eine größte untere Schranke.

Beweis. Betrachte $A = \{-x \ : \ x \in B\}$. Dann ist A nach oben beschränkt und hat laut vorhergehendem Satz ein Supremum $a_0 \in \mathbb{R}$. Weil $-x \leq a_0$, also $-a_0 \leq x$, $\forall\ x \in B$, ist $-a_0$ eine untere Schranke für B .
Würde es eine untere Schranke b_0 für B geben mit $-a_0 < b_0$, dann wäre $-b_0$ eine obere Schranke von A mit $-b_0 < a_0$. Widerspruch zur Supremumseigenschaft von a_0 !

Also ist $-a_0$ die größte untere Schranke von B, i.e. das Infimum von B .

Das Konvergenzkriterium von Cauchy ist ein sogenanntes "inneres Kriterium", da der Grenzwert selbst nicht benötigt wird. Es ist allerdings in der Praxis nicht immer einfach zu handhaben, weshalb es vorteilhaft ist, andere Konvergenzkriterien (vielleicht nur für spezielle Folgen) zur Verfügung zu haben.

Satz. (**Monotoniekriterium**) Eine monoton wachsende (bzw. fallende) und nach oben (bzw. unten) beschränkte Folge (a_n) reeller Zahlen ist konvergent.

Beweis. (für monoton wachsende Folgen) Gelte also $a_n \leq a_{n+1} \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ und sei $A = \{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ die Menge der Folgenglieder. Laut Voraussetzung ist dann A nach oben beschränkt und hat damit nach vorhergehendem Satz ein Supremum a . Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann muß ein Element a_m der Folge im Intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ liegen, weil im gegenteiligen Fall ein Element $a-\varepsilon < b < a$ ebenfalls eine obere Schranke von A wäre und dies ein Widerspruch zur Supremumseigenschaft von a wäre. Mit a_m liegen aber dann alle weiteren Elemente a_n , $n \geq m$, im Intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Dies bedeutet aber, dass $a_n \to a$, d.h. der Grenzwert der Folge (a_n) ist das Supremum von A .
(Im Falle von monoton fallenden Folgen ist der Grenzwert das Infimum der Menge der Folgenglieder)

Beispiel. Betrachte die Folge $y_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

(y_n) ist monoton wachsend, weil $y_{n+1} - y_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$,

(y_n) ist nach oben beschränkt, weil für $k \geq 2$ gilt: $k! = 1.2.3....k \geq 2^{k-1}$ und damit ist $y_n = 2 + \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \leq 2 + \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 + 2(1 - \frac{1}{2^n}) < 3$.

Somit ist die Folge (y_n) konvergent, das heißt, die unendliche Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ist konvergent!

Beispiel. Betrachte die Folgen (a_n) und (b_n) mit $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ und $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$.

Die Bernoulli-Ungleichung besagt, dass $(1+x)^n > 1+nx$ für $x > -1$ bzw. auch, dass $(1-x)^n > 1-nx$ für $x < 1$ (ersetze x durch $-x$) .

Damit gilt $(1+\frac{1}{n})^n(1-\frac{1}{n})^n = (1-\frac{1}{n^2})^n > 1-\frac{1}{n}$ und somit weiters $(1+\frac{1}{n})^n > \frac{1}{(1-\frac{1}{n})^{n-1}} = \frac{1}{(\frac{n-1}{n})^{n-1}} = (\frac{n}{n-1})^{n-1} = (1+\frac{1}{n-1})^{n-1}$.

Dies bedeutet, dass die Folge (a_n) monoton wachsend ist.

Wegen $\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{n^2}{(n+1)(n-1)} = \frac{n^2-1+1}{n^2-1} = 1+\frac{1}{n^2-1}$ gilt

$\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\frac{1}{(1-\frac{1}{n})^n} = (1+\frac{1}{n^2-1})^n > (1+\frac{1}{n^2})^n > 1+\frac{1}{n}$ und damit

$(1+\frac{1}{n})^{n+1} < \frac{1}{(1-\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{(\frac{n-1}{n})^n} = (\frac{n}{n-1})^n = (1+\frac{1}{n-1})^n$.

Dies bedeutet, dass die Folge (b_n) monoton fallend ist.

Da $1 < 1+\frac{1}{n} \leq (1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n})^{n+1} \leq (1+1)^2 = 4$ gilt, ist die Folge (a_n) nach oben beschränkt und die Folge (b_n) nach unten beschränkt. Somit sind beide Folgen konvergent.

Satz. Die Folgen $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ und $y_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ besitzen den gleichen Grenzwert.

Beweis. Mit dem Binomischen Lehrsatz gilt

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(\tfrac{1}{n})^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}1.\frac{n-1}{n}...\frac{n-k+1}{n} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = y_n \ .$$

Sei nun $m \leq n$ fest gewählt. Dann ist

$x_n \geq \sum\limits_{k=0}^{m} \binom{n}{k}(\frac{1}{n})^k = \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}1.\frac{n-1}{n}...\frac{n-k+1}{n}$. Mit $n \to \infty$ gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} = y_m \geq x_m \ .$$

Mit $m \to \infty$ und dem Einschließungskriterium gilt somit

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{k\to\infty} y_k$.

Definition. Mit $e := \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ sei die sogenannte **Euler'sche Zahl** bezeichnet.

Man kann zeigen, dass e irrational ist, d.h. $e \notin \mathbb{Q}$.

Zum Abschluß wird nun gezeigt, dass in $\mathbb{R}$ jede Gleichung der Form $x^p = a$ mit $p \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ lösbar ist.

Die Fälle $a = 0$ bzw. $p = 1$ sind trivial. Sei daher im weiteren $a > 0$ und $p \geq 2$.

Betrachte die rekursiv gegebene Folge (x_n) mit

$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^p - a}{p x_n^{p-1}} = \frac{p-1}{p} x_n + \frac{a}{p x_n^{p-1}}$, wobei $x_1 > 0$ so gewählt wird, dass $x_1^p > a$ ist.

Mit der Rekursionsformel gilt dann offenbar $x_n > 0 \ \forall \ n$.

Unter Verwendung der Bernoulli-Ungleichung folgt dann

$x_n^p - a = (x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^p - a}{p x_{n-1}^{p-1}})^p - a = x_{n-1}^p (1 - \frac{x_{n-1}^p - a}{p x_{n-1}^p})^p - a \geq x_{n-1}^p (1 - \frac{x_{n-1}^p - a}{x_{n-1}^p}) - a = x_{n-1}^p - x_{n-1}^p + a - a = 0$, also $x_n^p \geq 0$.

(x_n) ist monoton fallend, weil $x_{n+1} - x_n = -\frac{x_n^p - a}{p x_n^{p-1}} \leq 0$.

Wegen $x_n > 0$ und des Monotoniekriteriums konvergiert (x_n) gegen eine Zahl $y \in \mathbb{R}$.

Wegen $p x_{n+1} \cdot x_n^{p-1} = p x_n \cdot x_n^{p-1} - x_n^p + a$ und $x_n \to y$ und $x_{n+1} \to y$ gilt $p y^p = p y^p - y^p + a$.

Also ist $x = y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ Lösung der Gleichung $x^p = a$.

Schreibweise: $x = \sqrt[p]{a}$.