

Stetige Funktionen

Eine zentrale Rolle in der Analysis spielen Abbildungen $f : X \rightarrow Y$, wobei X und Y strukturierte Mengen sind (wie z.B. Vektorräume oder metrische Räume). Dabei sind i.a. nicht beliebige Abbildungen von Interesse, sondern Abbildungen mit besonderen Eigenschaften wie "stetig" oder "differenzierbar".

Bei der Eigenschaft "stetig in einem Punkt x_0 " geht es darum, der Idee, "wenn x 'nahe' bei x_0 ist, dann soll $f(x)$ 'nahe' bei $f(x_0)$ sein", eine präzise mathematische Bedeutung zu geben.

Definition. Seien (X, d) und (Y, D) metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

i) f heißt **stetig in** x_0 ($x_0 \in D(f)$), wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \text{sodass} \quad d(x_0, x) < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad D(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$$

ii) f heißt **stetig auf** $X_0 \subseteq D(f)$, wenn f stetig in allen Punkten $x_0 \in X_0$ ist.

• Somit ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann stetig in $x_0 \in D(f)$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein zugehöriges $\delta_\varepsilon > 0$ gibt (δ_ε hängt von ε und x_0 ab!) sodass für alle $x \in D(f)$ mit $|x_0 - x| < \delta_\varepsilon$ gilt, dass $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$.

In anderen Worten: Wird ein beliebiges ε -Intervall um $f(x_0)$ vorgegeben, dann existiert dazu ein δ_ε -Intervall um x_0 , welches zur Gänze in das ε -Intervall um $f(x_0)$ abgebildet wird.

Satz. Seien (X, d) und (Y, D) metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) f ist stetig in x_0 ,
- 2) für **jede** Folge mit $x_n \rightarrow x_0$ gilt dass $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Beweis.

1) $\Rightarrow$ 2) : Gelte $x_n \rightarrow x_0$ und sei $\varepsilon > 0$. Laut Voraussetzung gibt es ein $\delta_\varepsilon > 0$ mit $d(x_0, x) < \delta_\varepsilon \Rightarrow D(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$. Wegen $x_n \rightarrow x_0$ gibt es ein $N_{\delta_\varepsilon} \in \mathbb{N}$ sodass $d(x_0, x_n) < \delta_\varepsilon$ für $n > N_{\delta_\varepsilon}$.

Damit gilt aber $D(f(x_0), f(x_n)) < \varepsilon$ für $n > N_{\delta_\varepsilon}$, i.e. $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

2) $\Rightarrow$ 1) : Annahme: f **nicht** stetig in x_0 .

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ sodass es für jedes $\delta > 0$ einen Punkt x_δ gibt mit $d(x_0, x_\delta) < \delta$ aber $D(f(x_0), f(x_\delta)) \geq \varepsilon$.

Im besonderen (für jeweils $\delta = \frac{1}{n}$) gibt es damit eine Folge (x_n) mit $d(x_0, x_n) < \frac{1}{n}$ aber $D(f(x_0), f(x_n)) \geq \varepsilon$. Damit $x_n \rightarrow x_0$ aber $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$, ein Widerspruch. Also ist f stetig in x_0 . $\square$

Einfache Beispiele.

1) Die **konstante Funktion** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \ \forall x$ ist stetig (also stetig in jedem x_0).

2) Die **identische Funktion** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x \ \forall x$ ist stetig (also stetig in jedem x_0).

Satz. (Komposition stetiger Abbildungen ist stetig)

Seien X, Y, Z metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, wobei $B(f) \subseteq D(g)$.

Ist dann f stetig in $x_0 \in D(f)$ und g stetig in $f(x_0)$, dann ist $g \circ f$ stetig in x_0 .

Beweis. Gelte $x_n \rightarrow x_0$. Wegen der Stetigkeit von f gilt dann $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Wegen der Stetigkeit von g gilt dann $g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x_0))$, also $(g \circ f)(x_n) \rightarrow (g \circ f)(x_0)$. $\square$

Eine Überlegung.

Wir betrachten $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$. Wegen $x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow x_n^2 \rightarrow x_0^2$ ist f in allen $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig.

Zu $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt es also ein $\delta_\varepsilon(x_0) > 0$ mit der Eigenschaft $|x_0 - x| < \delta_\varepsilon(x_0) \Rightarrow |x_0^2 - x^2| < \varepsilon$.

Fixiert man ε , dann ist zu erwarten, dass $\delta_\varepsilon(x_1)$ kleiner zu wählen ist, wenn $|x_1| > |x_0|$.

Die Frage ist nun, ob man ein "Universal- δ_ε " finden kann, welches für alle Punkte (bzw. für alle Punkte eines bestimmten Bereiches) das Gewünschte leistet. Dies führt zum Begriff der "gleichmäßigen Stetigkeit".

Definition. Seien (X, d) und (Y, D) metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$. Dann heißt f **gleichmäßig stetig** auf $X_0 \subseteq D(f)$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein "Universal- δ_ε " $\delta_\varepsilon > 0$ existiert sodass $d(x_1, x_2) < \delta_\varepsilon \Rightarrow D(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

Bemerkungen.

- 1) Man mache sich den Unterschied zwischen "Stetigkeit" und "gleichmäßiger Stetigkeit" klar !
- 2) Gleichmäßige Stetigkeit ist eine sogenannte "globale" Eigenschaft, während Stetigkeit eine "lokale" Eigenschaft ist.
- 3) Klarerweise gilt : f gleichmäßig stetig auf $X_0 \Rightarrow f$ stetig in jedem $x_0 \in X_0$.

Aber: $f(x) = x^2$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$, aber dort nicht gleichmäßig stetig (Aufgabe).

Der folgende **sehr wichtige** Satz streicht die Bedeutung von kompakten Mengen hervor und wird zu einem späteren Zeitpunkt gezeigt.

Satz. Seien (X, d) und (Y, D) metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ stetig auf $X_0 \subseteq D(f)$.

- 1) Ist X_0 kompakt, dann ist auch $f(X_0)$ kompakt.
- 2) Ist X_0 kompakt, dann ist f auch gleichmäßig stetig auf X_0 .

Bemerkung. $f(x) = x^2$ ist **nicht** gleichmäßig stetig auf $X_0 = \mathbb{R}$, aber gleichmäßig stetig auf z.B. einem kompakten Intervall $X_0 = [a, b]$.

Für Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) auf einem metrischen Raum X können nun in naheliegender Weise algebraische Operationen wie Summe, Produkt und Quotient von Funktionen definiert werden.

- $f \pm g : (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
- $f \cdot g : (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $\frac{f}{g} : (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Dabei ist $D(f \pm g) = D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g)$ und $D(\frac{f}{g}) = D(f) \cap \{x \in D(g) : g(x) \neq 0\}$

Satz. Sind $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) stetig in $x_0 \in D(f) \cap D(g)$, dann auch $f \pm g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (falls $g(x_0) \neq 0$).

Beweis. Für $f \cdot g : x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ und $g(x_n) \rightarrow g(x_0) \Rightarrow f(x_n) \cdot g(x_n) \rightarrow f(x_0) \cdot g(x_0)$. Also $(f \cdot g)(x_n) \rightarrow (f \cdot g)(x_0)$. $\square$

Aus dem vorhergehenden Satz folgt sofort, dass die folgenden Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind: $f(x) = x^2$, $f(x) = x^n$, $f(x) = x^3 - 3x + 5$. Des weiteren ist $f(x) = \frac{x^4+1}{x^2-3}$ stetig in allen $x \neq \pm\sqrt{3}$.

Für Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow Y$ kann auch die sog. "einseitige Stetigkeit" erklärt werden. Dabei heißt f **linksseitig** (bzw. **rechtsseitig**) **stetig in** x_0 , wenn gilt:

$$x_n \rightarrow x_0 \text{ und } x_n \leq x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0) \quad \text{bzw.} \\ x_n \rightarrow x_0 \text{ und } x_n \geq x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0)$$

Bemerkung. Offenbar ist $f : \mathbb{R} \rightarrow Y$ genau dann stetig in x_0 , wenn f linksseitig und rechtsseitig stetig in x_0 ist.

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $f(x) = 1$ für $x > 0$ ist linksseitig stetig in $x_0 = 0$, aber nicht rechtsseitig stetig.

Für Funktionen können auch geeignete Beschränktheitsbegriffe erklärt werden.

Definition. Sei X ein metrischer Raum.

1) $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt auf $X_0 \subseteq D(f)$ **nach oben (bzw. nach unten) beschränkt**, wenn es eine Konstante $M > 0$ gibt mit $f(x) \leq M$ (bzw. $f(x) \geq M$) für alle $x \in X_0$.

2) $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt auf $X_0 \subseteq D(f)$ **beschränkt**, wenn f sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist, d.h. wenn es eine Konstante $M > 0$ gibt mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in X_0$.

3) $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ heißt auf $X_0 \subseteq D(f)$ **beschränkt**, wenn es eine Konstante $M > 0$ gibt mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in X_0$.

Bemerkung.

Sind f, g beschränkt auf X_0 , dann auch $f \pm g$ und $f \cdot g$.

Bemerkung. Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ auf $X_0 \subseteq X$ beschränkt. Dann existieren $\sup_{x \in X_0} f(x)$ und $\inf_{x \in X_0} f(x)$, müssen aber nicht auf X_0 angenommen werden.

Betrachte etwa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ und $X_0 = (0, 1)$. Dann ist $\sup_{x \in X_0} f(x) = 1$ und $\inf_{x \in X_0} f(x) = 0$. Diese werden jedoch auf X_0 nicht angenommen.

Definition. Sei X ein metrischer Raum und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Dann hat f an der Stelle $x_0 \in X_0 \subseteq D(f)$ ein

i) **absolutes Maximum auf X_0** , wenn $\forall x \in X_0 \quad f(x) \leq f(x_0)$ und $f(x_0) = \sup_{x \in X_0} f(x)$.

ii) **absolutes Minimum auf X_0** , wenn $\forall x \in X_0 \quad f(x) \geq f(x_0)$ und $f(x_0) = \inf_{x \in X_0} f(x)$.

iii) $x_0 \in X_0 \subseteq D(f)$ heißt **Nullstelle** wenn $f(x_0) = 0$.

Satz. Sei X ein metrischer Raum und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf X_0 . Ist X_0 **kompakt**, dann hat f auf X_0 ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum.

Beweis. Laut vorherigem Satz ist $f(X_0)$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$, also beschränkt und abgeschlossen. Damit gilt $\exists \sup_{x \in X_0} f(x)$, $\inf_{x \in X_0} f(x)$ und $\sup_{x \in X_0} f(x)$, $\inf_{x \in X_0} f(x) \in f(X_0)$. $\square$

Häufig interessiert man sich lediglich für das lokale Verhalten von f in einer Umgebung von x_0 . Man sagt dann, f habe an der Stelle x_0 ein

i) **relatives Maximum auf X_0** , wenn es eine Umgebung $U(x_0)$ von x_0 gibt mit $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in X_0 \cap U(x_0)$,

ii) **relatives Minimum auf X_0** , wenn es eine Umgebung $U(x_0)$ von x_0 gibt mit $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in X_0 \cap U(x_0)$.