

Der Satz von Taylor

Die Kenntnis von f' liefert gewisse Rückschlüsse auf die Funktion f selbst, z.B. Monotonie, mögliche lokale Extrema. Die Kenntnis von f'' liefert darüberhinaus eine Information, ob dieses Wachsen bzw. Fallen von f zunimmt oder abnimmt. Dies führt zur Überlegung, ob bei Kenntnis aller Ableitungen an einer Stelle x_0 die Funktion global oder zumindest auf einem Intervall rekonstruierbar ist.

Beispiel. Betrachte das Polynom $f(x) = x^3 - x^2 - 5$. f kann auch in der Form $f(x) = (x-1)^3 + 2(x-1)^2 + (x-1) - 5 = \sum_{k=0}^3 a_k(x-x_0)^k$ mit $x_0 = 1$ und $a_0 = -5, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1$ geschrieben werden.

Beachte, dass $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Betrachte nun ein beliebiges Polynom $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Unter Verwendung des binomischen Lehrsatzes erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n a_k [(x-x_0) + x_0]^k = \sum_{k=0}^n a_k \left\{ \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (x-x_0)^m x_0^{k-m} \right\} = \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k a_k x_0^{k-m} \binom{k}{m} (x-x_0)^m = \sum_{m=0}^n \left\{ \sum_{k=m}^n a_k x_0^{k-m} \binom{k}{m} \right\} (x-x_0)^m = \\ &= \sum_{m=0}^n b_m (x-x_0)^m \quad \text{mit} \quad b_m = \sum_{k=m}^n a_k x_0^{k-m} \binom{k}{m}. \end{aligned}$$

Für $x = x_0$ folgt: $f(x_0) = b_0$ bzw. $b_0 = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}$.

k -faches Differenzieren von $f(x)$ liefert

$$f^{(k)}(x) = \sum_{m=k}^n b_m m(m-1)\dots(m-k+1)(x-x_0)^{m-k}.$$

Für $x = x_0$ folgt dann $f^{(k)}(x_0) = b_k k!$ bzw. $b_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Damit gilt: $f(x) = \sum_{m=0}^n \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x-x_0)^m$.

In anderen Worten : $f(x)$ läßt sich durch $f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ darstellen.

Satz. (Taylor)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, f $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar auf I und $x_0 \in I$. Dann gilt

$$1) \quad \forall x \in I \text{ ist } f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x, x_0) .$$

$$2) \quad \text{Für } R_n(x, x_0) \text{ gilt nach Lagrange } R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

wobei $x_0 < \xi < x$ bzw. $x < \xi < x_0$ oder in Standardschreibweise

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} , \quad 0 < \vartheta < 1 .$$

Bemerkung.

$$\text{i) } T_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \text{ heißt } \mathbf{Taylorpolynom} \text{ (} n\text{-ter Ordnung)}$$

$$\text{ii) } R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \text{ heißt } \mathbf{Restglied nach Lagrange}$$

Beweis.

ObdA sei $x > x_0$. Betrachte die Hilfsfunktion

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) - \frac{f''(t)}{2!} (x - t)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!} (x - t)^n - m \frac{(x - t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

mit $t \in [x_0, x]$ wobei $m = m(x, x_0)$ so gewählt wird, dass $g(x_0) = 0$.

Nachdem auch $g(x) = 0$ ist, sind die Voraussetzungen des Satzes von Rolle erfüllt, daher $\exists \xi \in (x_0, x)$ mit $g'(\xi) = 0$.

$$g'(\xi) = 0 - f'(\xi) - f''(\xi)(x - \xi) + f'(\xi) - \frac{f'''(\xi)}{2!} (x - \xi)^2 + f''(\xi)(x - \xi) -$$

$$- \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x - \xi)^n + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!} (x - \xi)^{n-1} + m \frac{(x - \xi)^n}{n!} =$$

$$- \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x - \xi)^n + m \frac{(x - \xi)^n}{n!} = 0 .$$

Daraus folgt $m = f^{(n+1)}(\xi)$. Setzen wir nun in $g(t)$ für $t = x_0$, so erhalten wir die Taylor-Formel. $\square$

f genüge den Voraussetzungen des Satzes von Taylor. Sei $p \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die beiden Hilfsfunktionen

$$G(t) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k \quad \text{und} \quad g(t) = (x-t)^p.$$

Nach dem 2. MWS $\exists \xi \in (x, x_0)$ bzw. $\xi \in (x_0, x)$ sodass

$$\frac{G(x) - G(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{G'(\xi)}{g'(\xi)}. \quad \text{Wegen } G(x) = 0 = g(x) \text{ erhalten wir}$$

$$\frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k}{(x-x_0)^p} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{n!p(x-\xi)^{p-1}},$$

$$\text{somit } f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{pn!} (x-x_0)^p (x-\xi)^{n+1-p} =$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_n(x, x_0).$$

Setzen wir wiederum $\xi = x_0 + \vartheta(x-x_0)$ mit $0 < \vartheta < 1$, so erhalten wir das **Restglied von Schlömilch**:

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x-x_0))}{pn!} (1-\vartheta)^{n+1-p} (x-x_0)^{n+1}$$

Für $p = 1$ erhalten wir daraus das **Restglied von Cauchy**

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x-x_0))}{n!} (1-\vartheta)^n (x-x_0)^{n+1}$$

Für $p = n+1$ erhalten wir wieder das Restglied von Lagrange.

Bemerkung. Wenn f beliebig differenzierbar ist, gilt die Taylor-Formel für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist das Taylor-Polynom

$$T_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \quad \text{für jedes feste } x \in I \quad \text{Teilsumme der}$$

unendlichen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$, der sog. **Taylor-Reihe** von f bzgl. des **Entwicklungspunktes** x_0 .

Da der Satz von Taylor nichts über die Konvergenz dieser Reihe aussagt, stellt sich die Frage, an welchen Stellen $x \in I$ die Reihe konvergiert und unter welchen Bedingungen die Summe der Reihe gleich $f(x)$ ist (d.h. die Taylor-Reihe die Funktion darstellt).

Aus der Taylor-Formel und der Definition der Konvergenz unendlicher Reihen folgt sofort

Satz. Sei f beliebig oft differenzierbar auf I .

Dann gilt $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ genau dann, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, x_0) = 0$ ist.

Bemerkung. Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, x_0) = a \neq 0$, dann konvergiert zwar die Taylor-Reihe, aber nicht gegen $f(x)$.

Beispiel. Betrachte $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, also ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \equiv 0$, d.h. die Taylor-Reihe stellt f nur an der Stelle $x = 0$ dar.

Gibt es auf dem Bereich $[x_0, x]$ bzw. $[x, x_0]$ allerdings eine gemeinsame Schranke für die Ableitungen, dann wird $f(x)$ durch die Taylor-Reihe dargestellt.

Satz. Sei f beliebig oft differenzierbar auf I . Wenn eine Konstante $K > 0$ (unabhängig von k) existiert mit $\max_{[x_0, x]} |f^{(k)}(\xi)| \leq K$ (bzw. $\max_{[x, x_0]} |f^{(k)}(\xi)| \leq K$), dann stellt die Taylor-Reihe f an der Stelle x dar.

Beweis.

$$|R_n(x, x_0)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \leq K \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$