

Fragenkatalog - VO

1. Was versteht man unter einer Äquivalenzrelation auf einer Menge ? Was sind Äquivalenzklassen ? Geben Sie ein Beispiel für eine Äquivalenzrelation an.
2. Was versteht man unter einer Abbildung f aus X in Y ? Erläutern Sie die Begriffe Definitionsmenge, Bildmenge, Bild einer Teilmenge, Urbild einer Teilmenge.
Wann heißt eine Abbildung injektiv, surjektiv, bijektiv ?
Was existiert die Umkehrabbildung und was ist sie ?
3. Beschreiben Sie das Prinzip der vollständigen Induktion und illustrieren Sie es mit einem einfachen Beispiel.
4. Sei (a_n) eine Folge in \mathbb{R} (bzw. einem geordneten Körper). Wann ist (a_n) nach oben beschränkt, nach unten beschränkt bzw. beschränkt ?
Was heißt monoton wachsend bzw. monoton fallend ?
Wann sagt man, dass die Folge (a_n) konvergent zum Grenzwert a ist ?
Was bedeutet die Aussage: (a_n) ist **nicht** konvergent ?
5. Geben Sie einige fundamentale Eigenschaften und Rechenregeln von konvergenten Folgen an (Einschlusskriterium, Summe, Produkt, Quotient von konvergenten Folgen etc.) .
6. Wie ist eine unendliche Reihe und deren Konvergenz definiert ? Geben Sie wichtige Beispiele für konvergente Reihen an.
7. Was ist eine Cauchy-Folge in einem geordneten Körper ? Wann heißt ein geordneter Körper vollständig ? Wie ist, rein mathematisch, eine reelle Zahl definiert ?
Welche wichtigen Folgerungen ergeben sich aus der Vollständigkeit von \mathbb{R} ? (Existenz von Supremum und Infimum, Monotoniekriterium)
8. Wie sind die komplexen Zahlen definiert ? Was ist der Betrag einer komplexen Zahl und welche Eigenschaften hat er ? Was ist die trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen ?

9. Wie ist der Raum \mathbb{R}^n definiert ? Was ist die Norm von $x \in \mathbb{R}^n$? Was ist das Skalarprodukt von $x, y \in \mathbb{R}^n$? Was besagt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung ? Wie ist ein Abstands begriff und damit der Begriff einer konvergenten Folge im \mathbb{R}^n definiert?
10. Wann ist eine Reihe $\sum_{k=1}^n a_k$ konvergent, absolut konvergent bzw. bedingt konvergent ? Geben Sie ein Beispiel für eine bedingt konvergente Reihe an.
11. Erläutern Sie das Vergleichskriterium, das Wurzelkriterium und das Quotientenkriterium für unendliche Reihen.
12. Was ist eine alternierende Reihe ? Was besagt das Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen ?
13. Was ist das Cauchy-Produkt von zwei unendlichen Reihen ?
14. Betrachten Sie \mathbb{R} bzw. \mathbb{R}^n . Was ist eine ε -Kugel bzw. eine ε -Umgebung um einen Punkt x_0 ? Was ist eine offene bzw. abgeschlossene Menge ?
 Wann heißt eine Teilmenge von \mathbb{R}^n kompakt ?
 Was heißt Häufungspunkt einer Menge bzw. einer Folge ?
 Was ist der Limes superior bzw. Limes inferior einer Folge in \mathbb{R} ?
 Was besagt der Satz von Bolzano-Weierstrass ?
15. Wann ist eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen X, Y stetig in einem Punkt x_0 ? Was heißt **nicht** stetig in x_0 ? Wie läßt sich die Stetigkeit mittels Folgen beschreiben ?
 Wie ist die linksseitige bzw. rechtsseitige Stetigkeit erklärt ?
16. Geben Sie einige elementare Eigenschaften stetiger Funktionen an (Summe, Produkt, Quotient etc.) an.
17. Wann ist eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen X, Y gleichmäßig stetig ? Geben Sie eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an, die stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.
18. Geben Sie einige wichtige Aussagen an, in denen die Rolle von kompakten Teilmengen zum Tragen kommt.

19. Was versteht man unter einem Polynom vom Grad n ? Was besagt der Identitätssatz für Polynome ?
- In welcher Form kann ein Polynom mit komplexen Koeffizienten zerlegt werden ? Wie sieht die Situation im Falle von Polynomen mit reellen Koeffizienten aus ?
20. Was besagt der Nullstellensatz von Bolzano ? Was ist die Aussage des Zwischenwertsatzes ? Was ist dabei die ausschlaggebende Voraussetzung, die an die beteiligte Funktion zu stellen ist ?
21. Was genau bedeuten die Schreibweisen $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ sowie $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$? Was heißt $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$? Was bedeutet $x_n \rightarrow +\infty$ für eine Folge (x_n) ?
22. Wann sagt man, dass eine Funktion f an einer Stelle x_0 stetig ergänzt werden kann ?
23. Was ist der Zusammenhang zwischen Monotonie und Existenz der Umkehrfunktion im Falle einer Funktion $f : I_1 \rightarrow I_2$, wobei $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle sind ?
- Was gilt für die Umkehrfunktion im Falle von stetigen und streng monotonen Funktionen f ?
24. Wann heißt eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in I$?
- Welche elementaren Ableitungsregeln kennen Sie ? Geben Sie einfache Beispiele von differenzierbaren Funktionen an.
25. Was besagt die Kettenregel ? Welche Aussage gilt bzgl. der Ableitung der Umkehrfunktion ?
26. Was besagen der Satz von Rolle, der 1. und 2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung ? Wofür kann der 1. Mittelwertsatz verwendet werden ?
27. Was besagt der Satz von Taylor ? Was versteht man unter der Taylor-Reihe einer Funktion $f(x)$? Geben Sie ein hinreichendes Kriterium an, dass die Taylor-Reihe die Funktion auch tatsächlich darstellt.
- Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion und ihre Taylor-Reihe an.
28. Was besagen die Regeln von de l'Hospital ?

29. Was ist ein lokales Extremum und was ist ein notwendiges Kriterium für das Vorliegen eines lokalen Extremums ? Geben Sie ein hinreichendes Kriterium für das Vorliegen eines lokalen Extremums an.
30. Was ist eine konvexe (konkave) Funktion f und wie lassen sich diese mittels f' bzw. f'' beschreiben ?
31. Was sind Ober- bzw. Untersummen und ihre grundlegenden Eigenschaften ? Was ist das untere (bzw. obere) Riemann-Darboux Integral einer beschränkten Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$?
32. Wann ist eine Funktion R -integrierbar ? Welche zwei wichtige Klassen von Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sind R -integrierbar ?
33. Erklären Sie den Begriff Riemannsches Summe ?
34. Was sind die grundlegenden Eigenschaften von R -integrierbaren Funktionen ?
35. Was versteht man unter dem Integral von f als Funktion der oberen Grenze und in Folge davon vom 1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ?
36. Was versteht man unter einer Stammfunktion von f ?
37. Beschreiben Sie einige Methoden zur Bestimmung unbestimmter Integrale (Substitution, partielle Integration, Partialbruchzerlegung).
38. Formulieren Sie die Mittelwertsätze der Integralrechnung.
39. Wie ist die Bogenlänge einer ebenen Kurve definiert ? Wie lautet die Formel zur Bestimmung der Bogenlänge im Falle differenzierbarer Kurven ?
40. Wann heißt eine Funktion uneigentlich integrierbar ? Was versteht man in diesem Zusammenhang unter dem Cauchy-Hauptwert ?
41. Wie ist der Winkel im Bogenmaß definiert ? Wie können damit die trigonometrischen Funktionen definiert werden ?