Funktionen mehrerer reeller Variabler

Der n-dimensionale Punktraum $\mathbb{R}^n$ ist, wie in der Linearen Algebra gezeigt wird, ein n-dimensionaler Vektorraum. Wir erwähnten früher, dass jedem Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ eine Länge oder **Norm** zugeordnet werden kann.

Die wichtigsten Normen sind dabei die

- **euklidische Norm** : $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$
- **Maximumsnorm** : $\|x\| = \max\limits_{1 \le k \le n} |x_k|$

Jeder Norm wiederum kann durch die Setzung $d(x, y) = \|x - y\|$ ein Abstandsbegriff (Metrik) zugeordnet werden, wodurch der $\mathbb{R}^n$ zu einem metrischen Raum wird. Für metrische Räume (X, d) (siehe früher) definierten wir die Begriffe ε-Umgebung, offene Menge, abgeschlossene Menge etc.

- $U_\varepsilon(x) = \{y \in X \ : \ d(x, y) < \varepsilon\}$ ... ε-Umgebung um x
- $O \subseteq X$ heißt offen, wenn $\forall\, x \in O \ \exists\, \varepsilon_x > 0$ mit $U_{\varepsilon_x}(x) \subseteq O$
- $A \subseteq X$ heißt abgeschlossen, wenn $X \setminus A$ offen ist

• Weiters bezeichneten wir eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ als kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist, i.e. A ist abgeschlossen und $\exists\, M > 0$ mit $\|x\| \le M \ \forall\, x \in A$.

• Ohne Beweis sei erwähnt, dass die euklidische Norm des $\mathbb{R}^n$ ($\hookrightarrow$ euklidische Metrik) und die Maximumsnorm des $\mathbb{R}^n$ ($\hookrightarrow$ Maximumsmetrik) dieselben offenen Mengen liefern.

Definition. Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen heißt stetig an $x \in X$, wenn $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta_\varepsilon > 0$ mit $x' \in U_{\delta_\varepsilon}(x) \Rightarrow f(x') \in U_\varepsilon(f(x)$.

Dabei gilt wieder, dass $f : X \to Y$ genau dann stetig an $x \in X$ ist, wenn gilt : $x_n \to x \;\Rightarrow\; f(x_n) \to f(x)$.

Man beachte, dass diese Definition im Spezialfall $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die bereits bekannte Stetigkeitsdefinition liefert.

Im besonderen ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig an $x^0 = (x_0, y_0)$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ gibt, sodass aus $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_\varepsilon$ folgt dass $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

(Hier wurde die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$ verwendet. Wie man sich leicht überlegt, kann man gleichwertig auch die Maximumsmetrik verwenden.)

Reellwertige Funktionen von 2 reellen Variablen lassen sich ebenfalls durch ihren "Graphen" veranschaulichen, der eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ ist,

$$S_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; (x, y) \in D(f) \; , \; z = f(x, y)\} \; .$$

Beispiele.

(i) $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ... obere Halbkugel mit Radius 1

(ii) $D(f) = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ... Kegel um die z-Achse

Wir betrachten nun Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Hier wird jedem $x \in D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Vektor $f(x) \in \mathbb{R}^m$ zugeordnet, weshalb derartige Funktionen auch **vektorwertige Funktionen** heißen. Zum Beispiel kann eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ so interpretiert werden, dass einem Ortspunkt $x \in D(f) \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Geschwindigkeitsvektor zugeordnet wird.

Sei nun $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine vektorwertige Funktion, i.e.

$$x = (x_1, ..., x_n) \;\mapsto\; f(x) = f(x_1, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$$

Die Funktionen $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $D(f_i) = D(f)$ für $1 \leq 1 \leq m$ heißen dabei **Koordinatenfunktionen**, und man schreibt in diesem Fall auch oft $f = (f_1, ..., f_m)$ bzw. verwendet die Vektorschreibweise $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$.

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x, y) = (\sin(x + y), e^{xy}, x - y)$. Dann ist $f_1(x,y) = \sin(x+y)$, $f_2(x,y) = e^{xy}$, $f_3(x,y) = x - y$.

Mit dem Folgenkriterium der Stetigkeit und dem Satz über die koordinatenweise Konvergenz folgt (fast) unmittelbar

Satz. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig an $x^0 \in D(f)$ wenn f_i stetig an $x^0 \in D(f)$ ist für jedes $1 \le i \le m$.

(Vgl. Lineare Algebra) Die einfachsten Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sind die linearen Abbildungen, i.e. Abbildungen der Form

$$y_1 = f_1(x_1, ..., x_n) = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n$$

$$y_2 = f_2(x_1, ..., x_n) = a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n$$

$$...$$

$$y_m = f_m(x_1, ..., x_n) = a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \ .$$

Lineare Abbildungen lassen sich auch in der kompakten Form $y = Ax$ angeben, wobei A eine $m \times n$ Matrix ist.

Satz. Jede lineare Abbildungen ist stetig.

Beweis. Sei $y = Ax$ eine lineare Abbildung, A eine $m \times n$ Matrix, $x^0 \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $M > 0$ mit $|a_{ij}| \le M \ \ \forall\, i, j$.

Dann ist $|f_i(x) - f_i(x^0)| = |a_{i1}(x_1 - x_1^0) + ... + a_{in}(x_n - x_n^0)| \le$

$\le M(|x_1 - x_1^0| + ... + |x_n - x_n^0|) \le Mn\|x - x^0\|$ (Maximumsnorm) .

Mit der Wahl von $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{Mn}$ ergibt sich die Behauptung. $\square$