Der Mittelwertsatz

Bei der Verallgemeinerung des 1. Mittelwertsatzes auf mehrere Variable zeigt sich, dass nicht nur die Funktion selbst, sondern auch die Definitionsmenge eine Rolle spielt.

Satz. (**1. Mittelwertsatz**)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $f \in C^1(X)$, wobei $X \subseteq D(f)$ eine **offene** Menge ist. Ferner seien $x^1, x^2 \in X$, sodass die Verbindungsstrecke $\overline{x^1x^2}$ zwischen x^1 und x^2 in X liegt.

Dann existiert ein $\vartheta \in (0,1)$ mit

$$f(x^2) - f(x^1) = \big(\mathrm{grad} f(x^1 + \vartheta(\vec{x}^2 - \vec{x}^1))\big)\,(\vec{x}^2 - \vec{x}^1) \ .$$

Beweis.
Für $x \in \overline{x^1x^2}$ ist $x = x^1 + t(\vec{x}^2 - \vec{x}^1)$ für ein geeignetes $t \in [0,1]$. Betrachte nun $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $F(t) = f(x^1 + t(\vec{x}^2 - \vec{x}^1))$.

Dann ist F stetig und auf $(0,1)$ differenzierbar. Damit sind aber die Voraussetzungen des 1. MWS für Funktionen einer reellen Variablen erfüllt und es gilt $F(1) - F(0) = F'(\vartheta)$ für ein geeignetes $\vartheta \in (0,1)$.

Mit der Kettenregel gilt dann

$$F(1) - F(0) = f(x^2) - f(x^1) = \big(\mathrm{grad} f(x^1 + \vartheta(\vec{x}^2 - \vec{x}^1))\big)\,(\vec{x}^2 - \vec{x}^1) \ . \quad \square$$

Folgerung. Auf konvexen Teilmengen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt der 1. MWS für jede Funktion $f \in C^1(X)$.

Bemerkung. (Veranschaulichung im $\mathbb{R}^2$)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x^1 = (x_1, y_1)$ und $x^2 = (x_2, y_2)$. Dann ist

$x^1 + \vartheta(\vec{x}^2 - \vec{x}^1) = (x_1 + \vartheta(x_2 - x_1), y_1 + \vartheta(y_2 - y_1)) = (\xi, \eta)$.

Sind also die Voraussetzungen des 1. MWS erfüllt, dann existiert ein $\vartheta \in (0,1)$ mit

$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = f_x|_{(\xi,\eta)}\,(x_2 - x_1) + f_y|_{(\xi,\eta)}\,(y_2 - y_1)$.

Im eindimensionalen Fall zeigten wir, dass eine auf einem Intervall differenzierbare Funktion mit verschwindender Ableitung dort konstant sein muss.

Die entsprechende Verallgemeinerung von "Intervall" ist nun die folgende wichtige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

Definition. Eine **offene** Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Gebiet**, wenn für alle $x, y \in G \ \exists \ x = x^1, x^2, ..., x^m = y$ mit $\overline{x^i x^{i+1}} \subseteq G$ für $i = 1, 2, ..., m-1$.

Satz. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, G ein Gebiet und $f \in C^1(G)$. Dann gilt

$$f \text{ ist konstant auf } G \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{grad} f(x) = \vec{0} \quad \forall \, x \in G \, .$$

Beweis. Ist f konstant, dann ist offenbar $\operatorname{grad} f(x) = \vec{0} \ \forall \, x \in G$.

Zum Beweis der Umkehrung wähle $x, y \in G$ und weitere Punkte $x^2, ..., x^{m-1}$ wobei $x = x^1$, $y = x^m$ und $\overline{x^i x^{i+1}} \subseteq G$ für $i = 1, 2, ..., m-1$.

Sukzessive Anwendung des 1. MWS liefert $f(x^{i+1}) = f(x^i)$ und schließlich $f(x) = f(y)$. $\square$

Bemerkung. Eine analoge Verallgemeinerung des MWS auf vektorwertige Funktionen ist nicht mehr gültig.