# Der Satz von Taylor

Wie im eindimensionalen Fall läßt sich eine Funktion $f \in C^{m+1}(X)$ durch ein Polynom (in $n$ Variablen) vom Grad $m$ approximieren.

Dazu betrachten wir für $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ den Differentialoperator $\vec{h} \cdot \text{grad}$ , der einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f \in C^1(X)$ die Funktion

$$(\vec{h} \cdot \text{grad}) f(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

zuordnet.

Für $k \in \mathbb{N}$ ist dann $(\vec{h} \cdot \text{grad})^k$ , die $k$-fache Anwendung des Differentialoperators, für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f \in C^k(X)$ gegeben durch

$$(\vec{h} \cdot \text{grad})^k f(x) = \sum_{\nu_1=1}^{n} \sum_{\nu_2=1}^{n} \ldots \sum_{\nu_k=1}^{n} h_{\nu_1} h_{\nu_2} \ldots h_{\nu_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{\nu_1} \partial x_{\nu_2} \ldots \partial x_{\nu_k}}(x) \ .$$

**Satz.** (**TAYLOR**)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $f \in C^{m+1}(X)$ . Weiters seien $x^0, x \in X$ mit $\overline{x^0 x} \subseteq X$ .

Dann gilt mit $\vec{h} = \vec{x} - \vec{x}^0$ und einem geeigneten $\vartheta \in (0,1)$

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\left((\vec{h} \cdot \text{grad})^k f(x^0)\right)}{k!} + \frac{1}{(m+1)!} \left((\vec{h} \cdot \text{grad})^{m+1} f(x)\right)\Big|_{x = x^0 + \vartheta \vec{h}}$$

**Beweis.**

Wegen $x^0, x \in X$ ist $f$ auf dieser Strecke definiert. Wir setzen nun $\varphi(t) = f(x^0 + t\vec{h})$ mit $t \in [0,1]$ .

Auf $\varphi(t)$ ist nun der Satz von Taylor in einer Variablen anwendbar, d.h. $\exists\ \vartheta \in (0,1)$ sodass gilt

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} 1^k + \frac{\varphi^{(m+1)}(\vartheta)}{(m+1)!} \ .$$

Nun ist

$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0 + t\vec{h}) = (\vec{h} \cdot \text{grad}) f(x^0 + t\vec{h})$ und damit

$\varphi'(0) = (\vec{h} \cdot \text{grad}) f(x^0)$ .

$\varphi''(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i \left( \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0 + t\vec{h}) \right) = (\vec{h} \cdot \text{grad})^2 f(x^0 + t\vec{h})$ und

$\varphi''(0) = (\vec{h} \cdot \text{grad})^2 f(x^0)$ .

......

$\varphi^{(k)}(t) = (\vec{h} \cdot \text{grad})^k f(x^0 + t\vec{h})$ und $\varphi^{(k)}(0) = (\vec{h} \cdot \text{grad})^k f(x^0)$ für jedes $1 \leq k \leq m+1$

Mit $\varphi^{(m+1)}(\vartheta) = (\vec{h} \cdot \text{grad})^{m+1} f(x^0 + \vartheta\vec{h})$ und Einsetzen in die obige Gleichung erhalten wir die Aussage des Satzes von Taylor. $\square$

**Bemerkungen.**

(i) Für $m = 0$ ergibt sich der Mittelwertsatz als Spezialfall des Satzes von Taylor.

(ii) Für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $m = 1$ erhalten wir

$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \left( h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) +$

$+ \frac{1}{2!} \left( h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k) =$

$= f(x_0, y_0) + h f_x(x_0, y_0) + k f_y(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}(h^2 f_{xx}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k) +$

$+ 2hk f_{xy}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k) + k^2 f_{yy}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k))$ .

(iii) Wie im eindimensionalen Fall schreibt man bisweilen

$$f(x) = T_m(x, x^0) + R_m(x, x^0) \ .$$

Für $f \in C^\infty(X)$ strebt $T_m(x, x^0)$ gegen die Taylor-Reihe, welche die Funktion $f$ darstellt, wenn $\lim_{m \to \infty} R_m = 0$ .

(iv) Ohne Beweis sei noch folgendes Ergebnis erwähnt, welches eine Abschätzungsformel liefert.

**Satz.** Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $f \in C^m(X)$ . Weiters seien $x^0, x \in X$ mit $\overline{x^0 x} \subseteq X$ .

Dann gibt es auf einer Umgebung $U(x^0)$ eine Funktion $g(x)$ sodass gilt

$$f(x) = T_m(x, x^0) + g(x)\|x - x^0\|^m \quad \text{und} \quad \lim_{x \to x^0} g(x) = 0 \ .$$