Gewöhnliche Differentialgleichungen - Grundlagen

Viele Vorgänge in den Naturwissenschaften bzw. in der Technik lassen sich unter Zugrundelegung geeigneter Modellvorstellungen durch Differentialgleichungen beschreiben, wie z.B. Bewegungen von Massen im bodennahen Gravitationsfeld (Fall- und Wurfbewegungen), mechanische oder elektrische Schwingungen, Wachstums- oder Zerfallprozesse usw.

Viele dieser Vorgänge werden durch Gleichungen beschrieben, die neben einer physikalischen Größe $y(x)$ auch deren Ableitungen $y'(x)$ und $y''(x)$ enthalten, zumeist in der "impliziten Form" $F(x, y, y', y'') = 0$.

Nach dem Satz über implizite Funktionen läßt sich eine solche Gleichung häufig lokal nach y'' auflösen und in die "explizite Form" $y'' = f(x, y, y')$ überführen.

Definition.

(i) Sei $F : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$. Dann heißt die Gleichung

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, ..., y', y, x) = 0$$

eine **(implizite) gewöhnliche Differentialgleichung** n-ter Ordnung für die (gesuchte) Funktion $y(x)$.

(ii) Unter einer **expliziten gewöhnlichen Differentialgleichung** n-ter Ordnung versteht man eine Gleichung der Form

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1}, y^{(n-2)}, ..., y', y, x)$$

wobei f eine gegebene Funktion in $n + 1$ Variablen ist.

(iii) Eine **Lösung** der Differentialgleichung in (i) auf einem Intervall I ist eine n-mal stetig differenzierbare Funktion $y(x)$, die auf I die Differentialgleichung identisch erfüllt.

(iv) Ersetzen wir die reellwertigen Funktionen y , F und f durch vektorwertige Funktionen, spricht man von einem **System** von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Wichtige Fragestellungen im Zusammenhang mit Differentialgleichungen sind

- Existiert für eine vorgelegte Differentialgleichung überhaupt eine Lösung?
- Wenn ja, auf welchem Intervall bzw. welchen Punktmengen?
- Wie lassen sich die Lösungen darstellen und welche Eigenschaften haben sie?
- Lassen sich **alle** Lösungen angeben?
- Durch welche Zusatzbedingungen ist **genau eine** Lösung aus der Lösungsgesamtheit bestimmt?

Beispiele.

1) $y' = f(x)$. Hier ist $y(x)$ offenbar eine Stammfunktion von $f(x)$. Bekanntlich tritt dabei eine Integrationskonstante auf. Derartige Konstanten treten in den "allgemeinen Lösungen" von gewöhnlichen Differentialgleichungen stets auf.

2) $\dot{N} = -\lambda N$ ... Differentialgleichung des radioaktiven Zerfalls

Die Lösung ist $N(t) = Ce^{-\lambda t}$, $C \in \mathbb{R}$.

3) $\ddot{x} = g$ ... Differentialgleichung des freien Falls.

Die Lösung ist $x(t) = \frac{g}{2}t^2 + C_1 t + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

4) $\ddot{x} + k\dot{x}^2 = g$ ... Differentialgleichung des freien Falls unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes.

Die Lösung ist $x(t) = \frac{1}{k} \ln\cosh\left(\sqrt{kg}t + C_1\right) + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

5) $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ ... Differentialgleichung einer harmonischen Bewegung.

Die Lösung ist $x(t) = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Bemerkung. In der Lösung treten so viele Konstanten auf wie die **Ord-**

nung der Differentialgleichung. Die Lösung erhält man sehr oft auch (nur) in impliziter Form.

Das Lösen einer Differentialgleichung wird häufig auch als "Integrieren der Differentialgleichung" bezeichnet.

Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung in expliziter Darstellung haben wir es mit Gleichungen der Form

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (*)$$

zu tun, wobei $f : G \to \mathbb{R}$ und $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet ist.

Gesucht ist eine auf einem Intervall I differenzierbare Funktion $y(x)$, die dort die Differentialgleichung identisch erfüllt, d.h.

$\forall\, x \in I$ gilt $y'(x) = f(x, y(x))$.

Definition.

(i) Ein Tripel (x, y, p) , wobei $p = f(x, y)$, heißt **Linienelement** von (*) . p bezeichnet offenbar die Steigung der Lösungskurve durch den Punkt $(x, y(x))$.

(ii) Die Menge aller Linienelemente von (*) heißt das **Richtungsfeld** von (*) .

(iii) $y'(x) = f(x, y(x))$ mit $y(x_0) = y_0$ heißt **Anfangswertproblem (AWP)** von (*) .

Bei einem AWP geht es also darum, Lösungen zu finden, welche durch einen vorgebenen Punkt gehen.