Elementar integrierbare Differentialgleichungen - I

In einer Reihe von Fällen gelingt es, die Lösungsgesamtheit einer Differentialgleichung 1. Ordnung in geschlossener Form - wenigstens als Integral - darzustellen.

1. $y'(x) = f(x)$ (y' ist nur Funktion von x)

Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Dann ist

$y(x) = F(x) + C = \int f(x)dx + C$.

Beispiel. $y' = x^2 + 2 \Rightarrow y = \frac{x^3}{3} + 2x + C$

2. $y'(x) = g(y(x))$ bzw. $y' = g(y)$, i.e. y' hängt nur von y ab.

Für ein y_0 mit $g(y_0) = 0$ ist offenbar die konstante Funktion $y(x) = y_0$ eine Lösung.

Für $g(y) \neq 0$ sei $G(y)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{g(y)}$. Dann ist

$G(y) = x + C$ Lösung der Differentialgleichung.

(Beweis: Differentiation nach x liefert $G'(y)y' = 1$ bzw. $\frac{1}{g(y)}y' = 1$)

Informell: $\frac{dy}{dx} = g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int dx \Rightarrow G(y) = x + C$

Beispiel. $y' = y + 2$ Dann ist $y(x) = -2$ Lösung. Die allgemeine Lösung ist $\ln|y + 2| = x + C$.

3. $y'(x) = f(x)g(y)$ (Differentialgleichung mit "getrennten Variablen")

Für $g(y_0) = 0$ ist die konstante Funktion $y(x) = y_0$ Lösung.

Für $g(y) \neq 0$ sei $G(y)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{g(y)}$ und $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Dann ist

$G(y) = F(x) + C$ Lösung der Differentialgleichung.

(Beweis: Differentiation nach x liefert $G'(y)y' = F'(x)$ bzw. $\frac{1}{g(y)}y' = f(x)$)

Informell: $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \Rightarrow G(y) = F(x) + C$.

Beispiel. $y' = x^2y^2$ Dann ist $y(x) = 0$ eine Lösung.

$\frac{dy}{y^2} = x^2dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int x^2dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{x^3}{3} + \frac{C}{3} \Rightarrow y = -\frac{3}{x^3+C}$

4. $y'(x) = f(x)y$ (**lineare homogene Differentialgleichung** 1. Ordnung)

Dies ist ein Spezialfall von 3. Klarerweise ist $y \equiv 0$ eine Lösung.

Für $y \neq 0$ ist $\ln|y|$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{y}$. Bezeichnet $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, dann ist mit vorher

$\ln|y| = F(x) + \widetilde{C}$ bzw. $|y| = e^{\widetilde{C}}e^{F(x)} = Ce^{F(x)}$ mit $C > 0$.

Damit ist $y = Ce^{F(x)}$ mit $C \neq 0$ Lösung. Zusammen mit $y \equiv 0$ wird durch $y = Ce^{F(x)}$ mit $C \in \mathbb{R}$ die Gesamtheit aller Lösungen beschrieben.

Beispiel. $y' = 4xy$ Dann ist $F(x) = 2x^2$ eine Stammfunktion von $f(x) = 4x$.

Also ist $y = Ce^{2x^2}$, $C \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung.

5. $y'(x) = f(x)y + g(x)$ (**lineare inhomogene Differentialgleichung** 1. Ordnung)

Seien y_1, y_2 Lösungen der inhomogenen Gleichung und setze $z(x) = y_1(x) - y_2(x)$. Dann ist

$z'(x) = y_1'(x) - y_2'(x)) = f(x)y_1 + g(x) - (f(x)y_2 + g(x)) =$

$= f(x)(y_1 - y_2) = f(x)z$.

D.h. $z(x)$ ist Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung. Damit ist die Lösungsgesamtheit der inhomogenen Differentialgleichung beschrieben durch $y(x) = y_H(x) + y_p(x)$, wobei $y_H(x)$ die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung bezeichnet, und $y_p(x)$ **eine** spezielle (oder partikuläre) Lösung der inhomogenen Gleichung.

Sei $y_H(x) = Ce^{F(x)}$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung, wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist. Mit dem Ansatz

$y_p(x) = C(x)e^{F(x)}$ ("Variation der Konstanten") erhalten wir

$C'(x)e^{F(x)} + C(x)e^{F(x)}f(x) = f(x)C(x)e^{F(x)} + g(x)$ bzw.

$C'(x) = g(x)e^{-F(x)}$ und $C(x) = \int g(x)e^{-F(x)}dx$.

Beispiel. $y' = 4xy + 2x$ Dann ist $y_H = Ce^{2x^2}$ (siehe vorher).

Wir treffen als Ansatz für eine partikuläre Lösung $y_p = C(x)e^{2x^2}$.

Eingesetzt in die inhomogene Gleichung erhalten wir

$C'e^{2x^2} + Ce^{2x^2}4x = 4xCe^{2x^2} + 2x$ bzw. $C' = 2xe^{-2x^2} = -\frac{1}{2}(-4xe^{-2x^2})$.

Somit ist $C(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x^2}$ und $y_p(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x^2}e^{2x^2} = -\frac{1}{2}$.

Die allgemeine Lösung ist damit $y(x) = Ce^{2x^2} - \frac{1}{2}$.

6. $y = xy' + f(y')$ (**Clairot Differentialgleichung**)

Durch Differenzieren nach x erhalten wir $y' = y' + xy'' + f'(y')y''$ und damit $y''(x + f'(y')) = 0$. Daraus folgt $y'' = 0$ oder $x + f'(y') = 0$.

In beiden Fällen ist zu bedenken, dass sich durch das Differenzieren die Lösungsgesamtheit vergrößert hat. Die so erhaltenen Lösungen müssen wir also noch in die ursprüngliche Differentialgleichung einsetzen.

(i) $y'' = 0 \Rightarrow y(x) = Cx + D$, woraus durch Einsetzen folgt $Cx + D = xC + f(C)$ i.e. $D = f(C)$ und damit

$y(x) = Cx + f(C)$. Dies stellt eine Geradenschar dar.

(ii) Sei $x + f'(y') = 0$. Wir setzen $y' = p$ und erhalten mit

$x(p) = -f'(p)$ und

$y = xy' + f(y') = -f'(p)p + f(p) = y(p)$

eine Parameterdarstellung der "singulären Lösung" . Sie ist geometrisch die Einhüllende der Geradenschar unter (i) .

Beispiel. $y = xy' + (y')^2$

Die allgemeine Lösung ist $y' = Cx + C^2$, $C \in \mathbb{R}$.

Zur Bestimmung der singulären Lösung setzen wir $y' = p$. Dann ist $f(p) = p^2$ und $f'(p) = 2p$.

Also ist $x(p) = -2p$ und $y(p) = -2pp + p^2 = -p^2$.

Wegen $p = -\frac{1}{2}x$ erhalten wir weiters $y(x) = -\frac{x^2}{4}$.

7. $y = xf(y') + g(y')$ (**d'Alembert Differentialgleichung**)

Eine Gerade $y = Cx + D$ kann nur dann Lösung der Differentialgleichung sein, wenn $C = f(C)$ und $D = g(C)$ ist.

Sei nun $y(x)$ Lösung und keine Gerade, i.e. y'' ist nicht konstant 0 . Setze $y' = p$.

Differentiation der d'Alembert Differentialgleichung nach x liefert

$p = f(p) + (xf'(p) + g'(p))\frac{dp}{dx}$.

Im Bereich $\frac{dp}{dx} \neq 0$ existiert lokal die Umkehrfunktion von $p(x)$ und es ist $\frac{dx}{dp} = \frac{1}{\frac{dp}{dx}}$.

Durch Multiplikation mit $\frac{dx}{dp}$ erhalten wir

$(p - f(p))\frac{dx}{dp} - xf'(p) = g'(p)$. Durch die Setzung

$a(p) = p - f(p)$, $b(p) = -f'(p)$, $c(p) = g'(p)$ entsteht eine lineare inhomogene Differentialgleichung

$a(p)\frac{dx}{dp} + b(p)x = c(p)$.

Bestimmung der Umkehrfunktion der Lösung dieser Differentialgleichung liefert $p(x) = y'(x)$ und damit $y(x)$.