Elementar integrierbare Differentialgleichungen - II

8. $y' + f(x)y = g(x)y^\alpha$ (**Bernoulli Differentialgleichung**)

Für $\alpha > 0$ ist $y = 0$ stets eine Lösung. Für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ liegt eine lineare Differentialgleichung vor, deren Lösung bereits bekannt ist (siehe vorher).

In den übrigen Fällen multiplizieren wir die Gleichung mit $y^{-\alpha}$ und erhalten $y^{-\alpha}y' + f(x)y^{1-\alpha} = g(x)$.

Mit der Transformation $z(x) = (y(x))^{1-\alpha}$ und $z'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$

erhalten wir durch Einsetzen $z' + (1-\alpha)f(x)z = (1-\alpha)g(x)$.

Dies ist nun eine lineare, inhomogene Differentialgleichung, die wir gemäß früher lösen können.

Beispiel. $y' + 2xy = -xy^4$

Hier ist $f(x) = 2x$, $g(x) = -x$ und $\alpha = 4$. $y = 0$ ist Lösung. Des weiteren setze $z = y^{-3}$, wodurch wir

$z' - 6xz = 3x$ erhalten, welche die Lösung $z(x) = Ce^{3x^2} - \frac{1}{2}$ besitzt.

Also gilt $\frac{1}{y^3} = Ce^{3x^2} - \frac{1}{2}$, $C \in \mathbb{R}$.

9. $y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x)$ (**Riccati Differentialgleichung**)

(Wäre $h(x) \equiv 0$, würde eine Bernoulli Gleichung mit $\alpha = 2$ vorliegen)

Die Riccati Differentialgleichung ist nicht immer elementar integrierbar, wohl aber bei Kenntnis von speziellen Lösungen.

Sei $y_1(x)$ eine spezielle Lösung und betrachte den Ansatz

$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{u(x)}$. Einsetzen liefert

$y_1' - \frac{u'}{u^2} = f(x)(y_1^2 + \frac{2y_1}{u} + \frac{1}{u^2}) + g(x)(y_1 + \frac{1}{u}) + h(x)$ und weiters

$0 = (y_1' - f(x)y_1^2 - g(x)y_1 - h(x)) = \frac{u'}{u^2} + \frac{2f(x)}{u}y_1 + \frac{f(x)}{u^2} + \frac{g(x)}{u} \quad .$

Nach Multiplikation mit u^2 erhalten wir die lineare Differentialgleichung

$u' + (2f(x)y_1 + g(x))u = -f(x)$.

Beispiel. $y' = y^2 - xy + 1$

Hier ist $f(x) = 1$, $g(x) = -x$ und $h(x) = 1$. Offenbar ist $y_1(x) = x$ eine spezielle Lösung.

Der Ansatz $y(x) = x + \frac{1}{u(x)}$ liefert schließlich die Gleichung

$u' + xu = -1$.

Bemerkung. Sind zwei spezielle Lösungen y_1, y_2 mit $y_1 \neq y_2$ bekannt, treffen wir den Ansatz $y(x) = y_2 + \frac{y_1 - y_2}{u}$ und erhalten durch Einsetzen

$u(x) = 1 + Ce^{\int (y_1 - y_2)dx} \quad , \; C \in \mathbb{R} \quad .$

10. $y'(x) = f(\frac{y}{x})$ (gleichgradig homogene Differentialgleichung)

Mit der Substitution $z(x) = \frac{y}{x}$ bzw. $y(x) = xz(x)$ erhalten wir

$z + xz' = f(z)$ bzw. $\frac{z'}{f(z) - z} = \frac{1}{x}$ (Trennung der Variablen) .

Integration liefert $\int \frac{dz}{f(z) - z} = \ln x + C$. Danach Rücksubstitution.

Beispiel. $y' = \frac{x^3 + y^3}{3xy^2}$

$y' = \frac{x^3 + y^3}{3xy^2} \; \frac{:x^3}{:x^3} = \frac{1 + (\frac{y}{x})^3}{3(\frac{y}{x})^2}$. Die Substitution $y = xz$ liefert nun

$z + xz' = \frac{1 + z^3}{3z^2}$ bzw. $xz' = \frac{1 + z^3}{3z^2} - z = \frac{1 - 2z^3}{3z^2}$. Weiters ist

$\frac{3z^2}{1 - 2z^3}dz = \frac{1}{x}dx$ und damit $-\frac{1}{2}\ln(1 - 2z^3) = \ln x - \widetilde{C}$ bzw.

$2\widetilde{C} = \ln(x^2(1 - 2z^3)) = \ln \frac{x^3 - 2y^3}{x}$. Daraus folgt

$\frac{x^3 - 2y^3}{x} = e^{2\widetilde{C}} = C$ bzw. $x^3 - 2y^3 = Cx$.

11. Bemerkung.

Wie schon zuvor besprochene Fälle zeigen, kann eine vorgelegte Differentialgleichung durch eine geeignete Substitution oft auf einen bekannten Typus zurückgeführt werden.

Dies ist auch bei einer Differentialgleichung der Form

$y'(x) = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ möglich.

Dabei ist allerdings die Untersuchung verschiedener auftretender Fälle erforderlich (siehe Literatur).

12. $y'' = f(x, y')$

Hier kommt y explizit nicht vor. Mit der Substitution $u(x) = y'(x)$ erhalten wir eine Differentialgleichung 1. Ordnung $u' = f(x, u)$, die dann weiter zu behandeln ist.

13. $y'' = f(y, y')$

Hier kommt die Variable x explizit nicht vor. Wir betrachten Intervalle I , wo $y' \neq 0$ auf ganz I ist. Dann existiert dort die Umkehrfunktion zu $y(x)$, d.h. x kann durch y ausgedrückt werden und wir können schreiben $y'(x) = \varphi(y)$.

Dann ist $y''(x) = \varphi'(y)y' = \varphi(y)\varphi'(y)$.

Dies liefert $\varphi(y)\varphi'(y) = f(y, \varphi(y))$, deren Lösung dann nach x zu integrieren ist.

Beispiel. $y'' = y'^3 + y'$

Offenbar erhalten wir mit $y' = 0$, i.e. $y = C$ Lösungen.

Sei nun $y' \neq 0$ und setze $y' = \varphi(y)$. Dies liefert

$\varphi\varphi' = \varphi^3 + \varphi$ bzw. $\varphi' = 1 + \varphi^2$. Integration liefert

$\arctan\varphi = y + C_1$ und $y' = \varphi = \tan(y + C_1) = \frac{\sin(y+C_1)}{\cos(y+C_1)}$.

Dabei ist $y + C_1 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ und $y + C_1 \neq k\pi \quad \forall\, k$.

Als Lösung erhalten wir schließlich $y(x) = \arcsin(C_2 e^{2x}) - C_1$, wobei $C_2 \neq 0$ ist.