Kurvenscharen, isogonale Trajektorien

Eine Kurvenschar (bzw. eine Familie von Kurven) in der Ebene läßt sich entweder in impliziter Form $F(x, y(x), C) = 0$ oder, falls möglich, in expliziter Form $y(x) = f(x, C)$ angeben. C heißt dabei der **Scharparameter**.

Differenzieren wir die implizite Darstellung nach x , dann erhalten wir

$$F_x + F_y y' = 0 \ .$$

Eliminieren wir aus den beiden Gleichungen $F = 0$ und $F_x + F_y y' = 0$ den Parameter C , dann erhalten wir eine (i.a. implizite) Differentialgleichung 1. Ordnung $G(x, y(x), y') = 0$, die **Differentialgleichung der Kurvenschar**.

Beispiel. Sei $F(x, y, C) = x^2 + y^2 - 2Cx = 0$. Wegen $(x-C)^2 + y^2 = C^2$ ist dies die Menge aller Kreise mit Mittelpunkt $(C, 0)$ und Radius $|C|$.

$F_x + F_y y' = 2x - 2C + 2yy' = 0 \ \Rightarrow \ C = x + yy'$.

Eingesetzt in $F = 0$ erhalten wir $x^2 + y^2 - 2x(x + yy') = 0$ bzw.

$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$ als Differentialgleichung der Kurvenschar.

Wir suchen nun zu einer gegebenen Kurvenschar eine weitere Kurvenschar, deren Kurven die der ersten Schar unter einem konstanten Winkel schneiden.

Definition. Zwei (einparametrige) Kurvenscharen $F_1(x, y, C_1) = 0$ und $F_2(x, y, C_2) = 0$ heißen **isogonale Trajektorien**, wenn alle Kurven der Schar F_1 von allen Kurven der Schar F_2 unter einem vorgegebenen konstanten Winkel φ geschnitten werden.

Sei nun die Kurvenschar $F_1(x, y, C_1) = 0$ gegeben. Diese möge die Differentialgleichung $G_1(x, y, y') = 0$ bzw. in expliziter Form $y' = g_1(x, y)$ besitzen.

(Eine analoge Betrachtung ist natürlich für den Fall $\widetilde{G}_1(x,y,x')=0$ bzw. $x'=\widetilde{g}_1(x,y)$ anzustellen)

Die gesuchte Kurvenschar ist von der Form $F_2(x,\eta(x),C_2)=0$ bzw. $\eta'=g_2(x,\eta)$.

Im Schnittpunkt zweier Kurven aus der jeweiligen Schar gilt $y(x)=\eta(x)$. Besitzt dort die Kurve der ersten Schar die Steigung α , i.e. $y'=\tan\alpha$, und die der zweiten die Steigung β , i.e. $\eta'=\tan\beta$, so gilt im Falle dass $\varphi\neq\frac{\pi}{2}$:

$$\tan\varphi=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\eta'-g_1(x,y)}{1+\eta' g_1(x,y)}=\frac{\eta'-g_1(x,\eta)}{1+\eta' g_1(x,\eta)}=C \quad \text{bzw.}$$

$$\eta'=\frac{g_1(x,\eta)+C}{1-Cg_1(x,\eta)}=g_2(x,\eta) \quad .$$

Dies ist die Differentialgleichung der gesuchten Kurvenschar.

Im Falle $\varphi=\frac{\pi}{2}$ erhalten wir

$$0=\cot\varphi=\cot(\beta-\alpha)=\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha} \Rightarrow \cot\alpha\cot\beta+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{g_1(x,y)}\frac{1}{\eta'}+1=\frac{1}{g_1(x,\eta)}\frac{1}{\eta'}+1=0 \text{ . Also } \eta'=-\frac{1}{g_1(x,\eta)}=-\frac{1}{y'} \ .$$

Dies ist die Differentialgleichung der sogenannten **orthogonalen Trajektorien**.

Beispiel. Man bestimme die orthogonalen Trajektorien von $F(x,y,C_1)=x^2+y^2-C_1^2=0$, $C_1>0$.

Die Differentialgleichung der gegebenen Kreisschar ist $x+yy'=0$. Dann ist $y'=-\frac{x}{y}$. Somit ist die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien gegeben durch

$$\eta'=-\frac{1}{-\frac{x}{\eta}}=\frac{\eta}{x} \ .$$

Diese Differentialgleichung hat als Lösung $\eta(x)=C_2x$, ist also eine Geradenschar.

Zusammengefasst : Die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien erhält man, indem man in der Differentialgleichung für die Ausgangskurvenschar y' durch $-\frac{1}{y'}$ ersetzt.

Bemerkung. Ist eine Kurvenschar $F_1(r, \varphi, C_1) = 0$ in Polarkoordinaten und die zugehörige Differentialgleichung durch $r'(\varphi) = g_1(r, \varphi)$ gegeben, dann ist die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien $F_2(\varrho, \varphi, C_2) = 0$ durch

$\varrho' = -\frac{\varrho^2}{g_1(\varrho,\varphi)}$ gegeben.

Beispiel. Sei $r(\varphi) = C_1 e^{-\varphi}$ gegeben. Die zugehörige Differentialgleichung ist $r' = -r = g_1(r, \varphi)$.

Die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien ist dann $\varrho' = -\frac{\varrho^2}{g_1(\varrho,\varphi)} = \varrho$. Sie besitzt die Lösung $\varrho(\varphi) = C_2 e^{\varphi}$.

Dies sind wieder logarithmische Spiralen (allerdings umgekehrt orientiert wie die ursprünglichen Spiralen).