Existenz- und Eindeutigkeit von Lösungen

In den bisherigen Überlegungen konnten wir sehr oft die Lösungsgesamtheit einer vorgelegten Differentialgleichung explizit angeben. Dadurch waren Fragestellungen nach der Existenz von Lösungen bzw. deren eindeutiger Bestimmtheit weitgehend beantwortet.

In vielen Fällen jedoch können wir mögliche Lösungen **nicht** in geschlossener Form angeben. Gerade dort ist es wichtig, von vornherein zu wissen, dass überhaupt eine Lösung - zumindest lokal - existiert (und eventuell sogar eindeutig bestimmt ist).

Wir betrachten nun das folgende **Anfangswertproblem**

$$\text{(AWP)} \quad y' = f(x,y) \ \ , \ y(x_0) = y_0 \qquad (*)$$

d.h. wir suchen eine auf einem Intervall I definierte Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung mit der Eigenschaft $y(x_0) = y_0$.

Definition. Eine auf einem Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$ definierte Funktion $f(x,y)$ genügt dort einer **Lipschitz-Bedingung bzgl.** y , wenn

$\exists\ L > 0$ sodass $\forall\ (x,y),(x,\widetilde{y}) \in B$ gilt : $|f(x,y) - f(x,\widetilde{y})| \leq L|y - \widetilde{y}|$

(L heißt **Lipschitz-Konstante**)

Satz. (**Picard-Lindelöf**) Sei das AWP $(*)$ gegeben.

$f(x,y)$ sei auf dem Rechteck $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ stetig und genüge dort einer Lipschitz-Bedingung bzgl. y .

Dann besitzt $(*)$ auf dem Intervall $I = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ **genau eine** Lösung, wobei $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ und $M = \max\limits_R |f(x,y)|$ ist.

Bemerkung. Ist $\frac{\partial f}{\partial y}$ stetig auf dem Rechteck R , dann genügt $f(x,y)$ dort auch einer Lipschitz-Bedingung bzgl. y , und die eindeutige Lösbarkeit von $(*)$ ist gegeben.

Beispiel. Sei $y' = e^{xy}$, $y(0) = 1$. $f(x,y) = e^{xy}$ ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig, und $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$ ist stetig. Also ist das AWP eindeutig lösbar.

Schwächt man die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf ab, dann ist das AWP nicht mehr notwendigerweise eindeutig lösbar.

Allerdings gilt die folgende Existenzaussage

Satz. (**Peano**) Sei das AWP $(*)$ gegeben.

$f(x,y)$ sei auf dem Rechteck $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ stetig.

Dann besitzt $(*)$ auf dem Intervall $I = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ **mindestens eine** Lösung, wobei $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ und $M = \max\limits_{R} |f(x,y)|$ ist.

Beispiel. Betrachte $y' = \sqrt{|y|}$ mit $y(0) = 0$. Offenbar ist $f(x,y) = \sqrt{|y|}$ stetig und $y \equiv 0$ eine Lösung des AWP.

Wie man leicht überprüft, ist auch

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & \text{falls } x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{4} & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

eine Lösung des AWP, welches somit **nicht** eindeutig lösbar ist.